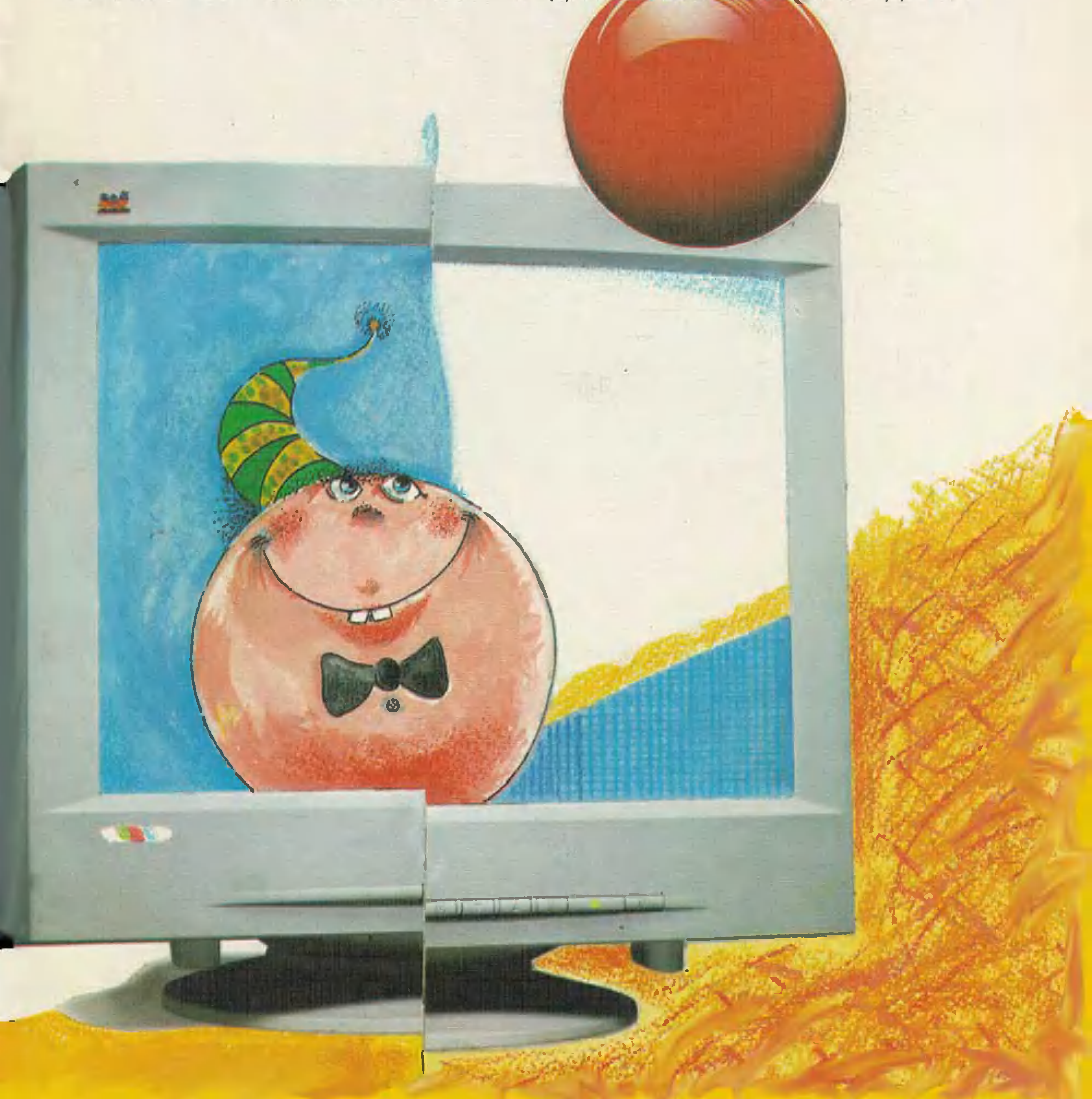
ISSN 0130-2221

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ 1997 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ · 1997 · №6

Бюро Квантум

В номере:

Разбиения, ГС-перестановки и деревья

Н.ВАСИЛЬЕВ, Л.КОГАНОВ

Школьники, серьезно интересующиеся математикой, участвующие в олимпиадах и готовые размышлять над сложными задачами, должны быть знакомы с элементами комбинаторики, одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики.

Хотя те несколько задач, которые мы ниже разбираем, не требуют предварительного изучения основ комбинаторики, мы очень советуем тем, кто встречается с комбинаторными задачами впервые, открыть учебник для физико-математических классов Н.Я.Виленкина, О.С.Ивашева-Мусатова, С.И.Шварцбурда «Алгебра и математический анализ», во второй части которого содержатся начальные сведения по комбинаторике, или замечательную книгу Н.Я.Виленкина «Комбинаторика», где на множестве разнообразных примеров объяснены характерные постановки задач и приемы рассуждений, которые встретятся в этой статье.

Начнем с формулировок трех задач, как мы скоро увидим, тесно связанных друг с другом. Вторая из них возникла в работе одного из самых известных современных специалистов по комбинаторике (автора ряда фундаментальных работ и очень хорошей книги «Перечислительная комбинаторика») Ричарда Стенли.

Формулировки задач

Задача о разбиениях на пары. Сколько существует разбиений множества из $2n$ элементов $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ на пары? (Порядок элементов внутри каждой пары, а также порядок самих пар не принимаются во внимание.)

Представив наши $2n$ элементов точками $1, 2, \ldots, 2n$ числовой прямой, мы можем изобразить каждое такое разбиение n полуокружностями, каждая из которых оканчивается в двух

Иллюстрация М.Константиновой

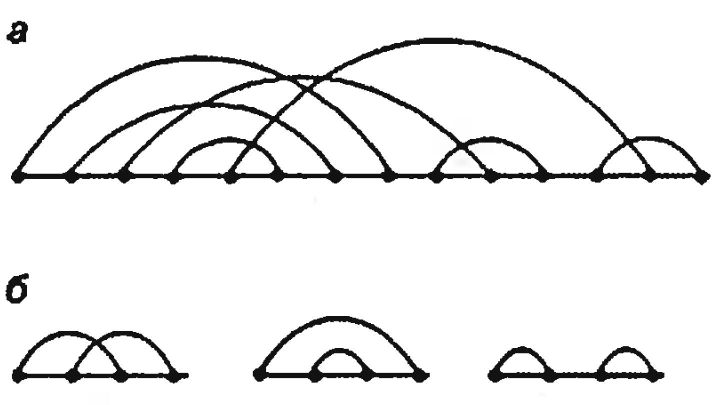


Рис. 1

точках пары (рис.1,*а*). Например, для $n = 2$ существует 3 различных разбиения множества $\{1, 2, 3, 4\}$ на пары (рис.1,*б*).

Задача о ГС-перестановках. Сколько существует перестановок из $2n$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ (каждое i от 1 до n входит в перестановку два раза!), удовлетворяющих следующему дополнительному *условию Гесселя — Стенли*: для любого $i < n$ все элементы, расположенные в перестановке между двумя вхождениями i, больше i?

Такие перестановки (мы будем называть их ГС-перестановками) рассматривались в статье, которую опубликовали в 1978 году два американских математика — Айра Гессель и Ричард Стенли. Каждую ГС-перестановку можно изобразить так. Расставим $2n$ точек на горизонтальной прямой, нарисуем в нижней полуплоскости n полуокружностей с концами в этих точках, ***не пересекающихся*** между собой (даже не имеющих общих концов) и расставим номера 1, 2, ..., n на полуокружностях так, чтобы полуокружность, лежащая выше другой, имела больший номер; например, рисунок 2,*а* изображает ГС-перестановку 13446631255772 — концы i-й полуокружности указывают, где расположены два вхождения элемента i в перестановку.

На рисунке 2,*б* изображены все 3 возможные ГС-перестановки для $n = 2$.

Задача о монотонных плоских корневых деревьях. В теории графов (граф — это система точек — *вершин*, — некоторые пары которых соединены отрезками — *ребрами* графа) *деревом* называется связный граф без *циклов*, т.е. граф, в котором для любых двух вершин есть только один путь, ведущий из одной в другую по (разным) ребрам. Мы будем рисовать деревья, растущие вверх из *корня* — некоторой точки O горизонтальной прямой l — и состоящие из n ребер — стрелок: одно или несколько ребер начинаются в точке O; из их концов, удаляясь от прямой l, могут расти еще несколько ребер, и так далее. Ребра занумерованы числами от 1 до n, причем *монотонно*: ребра, растущие из вершины, где заканчивается ребро i, должны иметь номера, большие i. При этом длины и направления ребер не принимаются во внимание, но если из какой-то вершины выходит несколько ребер, то важен порядок, в котором они расположены на плоскости (какое — левее, а какое — правее). Сколько существует различных монотонных плоских деревьев с n ребрами? Одно такое дерево изображено на рисунке 3,*а*. А на рисунке 3,*б* изображены все 3 различные дерева для $n = 2$.

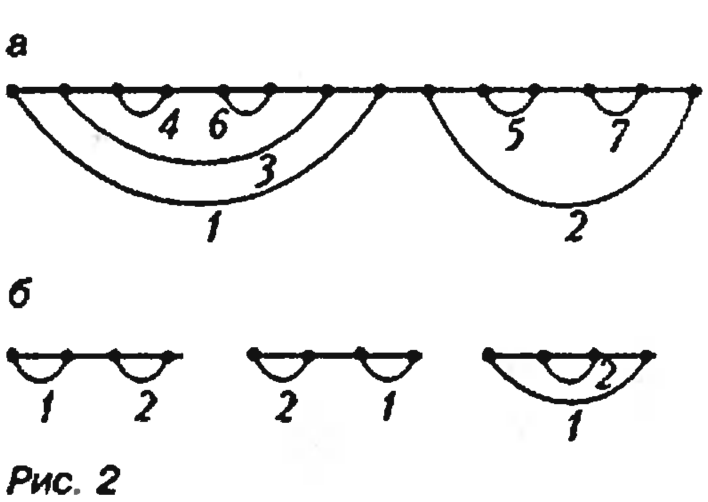


Рис. 2

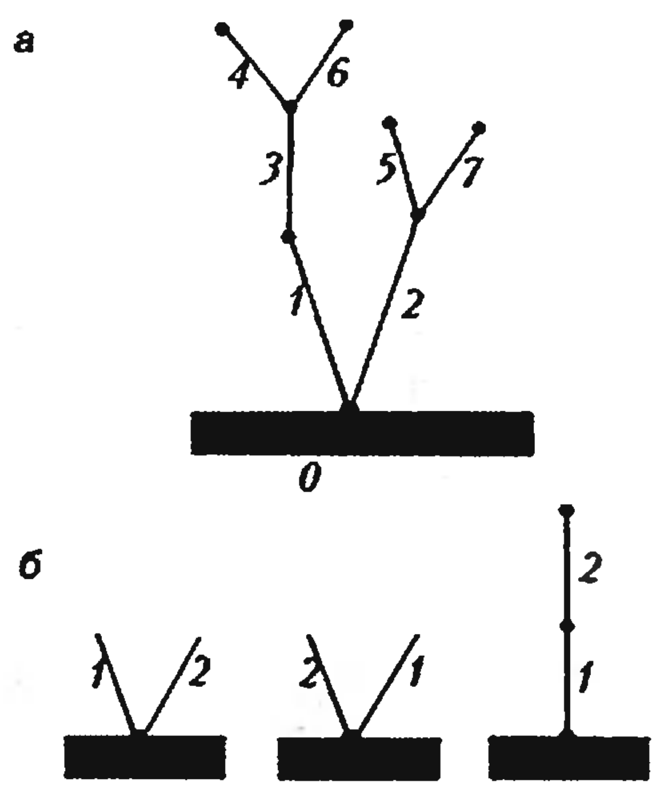


Рис. 3

Замечательно, что во всех трех этих столь разных на вид задачах один и тот же ответ — не только для $n = 2$, но и для любого n.

Разберем их по порядку.

Число разбиений

Напомним сначала две основные формулы комбинаторики.

Общее число различных перестановок из n элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1)$$

Это легко доказывается по индукции, например, так. Представим себе перестановку из $n - 1$ элементов как $n - 1$ точек на прямой, обозначенных в некотором порядке 1, 2, ..., $n - 1$. Эти точки делят прямую на n частей: луч слева от самой левой точки, отрезок между ней и соседней точкой, ..., луч слева от самой правой точки. Новую точку n можно поместить в каждую из этих частей. Таким образом, при переходе от $n - 1$ к n число перестановок увеличивается в n раз. Отсюда получается формула (1).

Число C_n^k различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящих из k элементов, равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2)$$

(при этом считается, что $0! = 1$). Эту формулу легко получить из (1), пользуясь тем, что в подмножестве (в отличие от перестановок) порядок расположения элементов не принимается во внимание. Рассмотрим любую из $n!$ перестановок элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ и условимся считать, что первые k элементов мы включаем в подмножество, а последние $(n - k)$ — нет. Тогда каждое определенное подмножество будет получаться из $k!(n - k)!$ перестановок: ведь в ней первые k элементов можно переставить $k!$ способами и, независимо от этого, последние $(n - k)$ элементов — $(n - k)!$ способами (тут используется основное в комбинаторике «правило произведения»). Поэтому общее число перестановок $n!$ равно $C_n^k k!(n-k)!$, откуда получается формула (2). Заметим, что в ней можно провести сокращения и записать ее так:

$$C_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k! =$$
$$= n(n-1)\ldots(k+1)/(n-k)!$$

Точно такими же рассуждениями решается и задача о числе разбиений множества из $2n$ элементов на n (неупорядоченных) пар. Сопоставим каждой перестановке $(i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots$ $\ldots, i_{2n-1}, i_{2n})$ из $2n$ элементов $(1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ такое разбиение на пары: $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \ldots, (i_{2n-1}, i_{2n})$. Тогда каждое разбиение будет получаться из $2^n n!$ перестановок: ведь в каждой паре можно (двумя способами) переставить элементы друг с другом — это дает множитель 2^n — и, кроме того, n пар можно переставить как угодно между собой. Итак, ответ:

число разбиений равно

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}=\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}=$$

$$=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

Это число обозначается $(2n-1)!!$ (читается: «$2n-1$ двойной факториал»; вы, конечно, знаете, что $n!$ читается «n факториал»). Как мы и обещали, оно встретится нам еще не раз.

Задача о ГС-перестановках

Здесь, так же как и для обычных перестановок, формула для числа $P_{ГС}(n)$ перестановок Гесселя – Стенли легко выводится с помощью индукции. Заметим, что, как следует из ГС-условия, пара элементов n, n в перестановке из $2n$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ должна стоять рядом. Представим перестановку (ГС-перестановку!) из $2n-2$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1\}$ как $2n-2$ точек прямой, делящих ее на $2n-1$ частей (два луча и $2n-3$ отрезка). В любую из этих частей мы можем поместить рядом пару (n, n) и получить $2n-1$ разных ГС-перестановок. Таким образом, при переходе от $n-1$ к n число ГС-перестановок увеличивается в $(2n-1)$ раз. Отсюда по индукции получаем

$$P_{ГС}(n)=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$$

Конечно, вполне естественно было бы здесь обсудить такой вопрос:

сколько вообще существует различных перестановок – не обязательно удовлетворяющих ГС-условию – «мультимножества» $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ из $2n$ элементов?

(Слово «мультимножество» означает, что некоторые элементы встречаются более одного раза – в отличие от обычного множества, где элементы считаются различными.)

Эту задачу – несложную – предлагаем решить читателям.

Мы приведем ответ на более общий вопрос: перестановок мультимножества $\{1, 1, \ldots, 1; 2, 2, \ldots, 2; \ldots; n, n, \ldots, n\}$, в котором i встречается k_i раз (в старой терминологии – *перестановок с повторениями*) существует

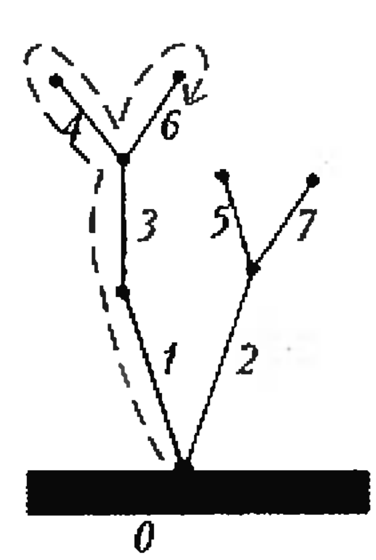
$$(k_1+k_2+\ldots+k_n)!/(k_1!k_2!\ldots k_n!).$$

Задача о монотонных плоских деревьях

Эту задачу тоже можно решить по индукции (подумайте, в какое количество мест можно вставить последнюю n-ю ветку дерева). Но мы для разнообразия поступим иначе. Мы докажем, что число таких деревьев с n ветками равно $(2n-1)!!$, установив взаимно однозначное соответствие между ними и ГС-перестановками мультимножества $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$. Аналогичное 1-1-соответствие (или, пользуясь французским термином, *биекция*) было, по-видимому, впервые предложено в 1967 году голландским математиком Николасом Говертом де Брейном и его соавтором Б.Морсельтом для иных целей.

Представим себе, что n ветвей занумерованного плоского дерева D с корнем O – это каналы (или – притоки реки, впадающей в озеро O). Пройдем от точки O, начав, скажем, с левого берега, вдоль всех каналов и вернемся в O, записывая последовательно номера всех встречавшихся нам каналов (рис.4). Каждый номер встретится дважды. При этом, если нумерация монотонна, то полученная перестановка мультимножества $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$, очевидно, будет удовлетворять ГС-условию (весь путь от того момента, когда мы прошли по левому берегу i-го канала, до того, как пришли к его правому берегу, проходит по каналам с номерами, большими i).

Обратно, по любой ГС-перестановке номеров $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ строится соответствующее монотонное плоское дерево с n ветвями: можно представить себе, что номера перестановки написаны в $2n$ клетках на полоске бумаги, которую мы кладем «ребром» на плоскость, сгибаем сначала в тех местах, где рядом стоят равные номера (в частности, пара (n, n)) и постепенно склеиваем все клетки с равными номерами.



1	3	4	4	6	6	3	1	2	5	5	7	7	2

↓

код:
12, 5, 8, 3, 2, 1, 1

Рис. 4

Итак, в задаче о деревьях ответ тот же: $(2n-1)!!$ Но если совпадение ответов во второй и третьей задачах мы объяснили, то с первой это совпадение выглядит достаточно случайным. Так ли это – обсудим в следующем разделе.

Универсальная биекция

Слово «биекция» нам уже встречалось – это точный математический термин, означающий взаимно однозначное соответствие между двумя множествами X и Y, т.е. отображение X на Y, при котором каждому элементу $x\in X$ ставится в соответствие элемент $y\in Y$. Разумеется, между любыми двумя конечными множествами X и Y с одинаковым числом элементов N можно установить какую-либо биекцию.

Упражнение. Докажите, что это можно сделать $N!$ способами.

Но когда речь идет о сложных комбинаторных объектах, *какая-то* биеция не слишком интересна. Замечательно, если правило, устанавливающее соответствие, достаточно простое, позволяющее по данному $x\in X$ сразу найти соответствующее ему $y\in Y$ и обратно, по y найти x. Это и есть (не совсем строго математическое) свойство, которое мы подразумеваем, говоря об универсальной биекции.

Приведем пример.

Каждому подмножеству множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно сопоставить его «код» – строчку длины n из цифр 0 или 1 (на i-м месте стоит 1, если i входит в подмножество, и 0 – если нет). Это – хорошо известная универсальная биекция. Она позволяет даже занумеровать все 2^n подмножеств: ведь «код» – строчку из 0 и 1 – можно рассматривать как двоичную запись числа от 0 до 2^{n-1}.

Вернемся теперь к задаче 1. Мы покажем, что в этой задаче – как и в задаче 2 – можно построить естественную биекцию с множеством наборов $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$, где α_i принимает $2i-1$ значений 1, 2, ...

..., $2i-1$ (для каждого i от 1 до n; нам удобнее нумеровать α_i не слева направо, как принято обычно, а в обратном порядке, как в языке иврит). В этом нам помогут *диаграммы связей* — полуокружности, с помощью которых мы иллюстрировали формулировки задач.

Итак, пусть у нас есть $2n$ элементов — точек по горизонтальной прямой — и заодно их разбиение на пары (см. рис.1,*а*; удобно на каждой полуокружности поставить стрелку, идущую справа налево). Рассмотрим самый правый элемент и найдем номер $\alpha_n \le 2n-1$ того элемента, с которым он составляет пару (мы считаем, что элементы занумерованы по порядку слева направо: 1, 2, ..., $2n-1$). Уберем эту пару. Останется $2n-2$ элемента. Рассмотрим самый правый из них; остальные (пропустив, если нужно, «бывший» α_n) занумеруем по порядку: 1, 2, ..., $2n-3$ и найдем номер $\alpha_{n-1} \le 2n-3$ элемента, к которому идет полуокружность от самого правого. Удалим и эту пару, и так далее. Так получается набор (α_n, α_{n-1}, ..., α_1), по которому, очевидно, однозначно восстанавливается разбиение на пары.

То же множество наборов (α_n, α_{n-1}, ..., α_1) еще проще сопоставить ГС-перестановкам: по существу, это и делалось в индуктивном решении задачи. Чтобы выбрать место для пары (n, n) в перестановке номеров {1, 1, 2, 2, ..., $n-1$, $n-1$}, стоящих возле $2n-2$ точек прямой, мы выбираем один из $2n-1$ лучей и интервалов, на которые эти точки делят прямую. Можно занумеровать эти интервалы слева направо: 1, 2, ..., $2n-1$ и найти номер α_n соответствующего интервала. В оставшейся ГС-перестановке из $2n-2$ элементов точно так же выбирается (после выбрасывания пары (n, n)) номер α_{n-1}, задающий место для пары ($n-1$, $n-1$), и так далее (см. «код» на рис. 4).

Ясно, что по «коду» (α_n, α_{n-1}, ..., α_1) мы легко строим и ГС-перестановку, и разбиение; тем самым, мы установили между ними универсальную биекцию.

Заметим, что отыскание красивых 1-1-соответствий в комбинаторике — задача даже более глубокая, чем поиск простых явных формул для количества объектов. Ведь очень часто таких формул просто нет.

Не менее сильным инструментом в изучении комбинаторных объектов служат *производящие функции*.

Если у нас есть некоторая последовательность a_m (скажем, выражающая количество каких-то объектов в зависимости от параметра $m \ge 0$), то производящая функция — это формальный степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots$$

Например, для числа C_{100}^m m-элементного подмножества множества {1, 2, ..., 100} производящая функция будет просто многочленом:

$$C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + \ldots + \ldots + C_{100}^{100}x^{100} = (1+x)^{100}.$$

Когда, как в этом примере, производящую функцию удается «свернуть» или выразить через другие функции, нередко можно получить массу интересных соотношений между коэффициентами или хорошие оценки для них. Разумеется, в задачах с несколькими параметрами используются и производящие функции от нескольких переменных, например,

$$\sum_{n\ge0}\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^n = \sum_{n\ge0}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

В заключительном разделе мы приведем еще несколько трудных задач, где участвуют производящие функции для перечисляющих последовательностей, связанных с ГС-перестановками и другими аналогичными комбинациями.

Задачи «на десерт»

Раньше мы интересовались всевозможными разбиениями множества из $2n$ элементов на пары. Теперь же поставим более общий вопрос о разбиении произвольного множества из p элементов на q блоков без каких-либо специальных ограничений. Пусть $S(p, q)$ — число таких разбиений.

Вернемся к ГС-перестановкам.

Назовем *спадом* (или спуском, или десантом) пару соседних чисел, если левое из этих чисел больше правого. Пусть $B_{k,i}$ — число ГС-перестановок с ровно $i-1$ спуском на мультимножестве $\{11, 22, \ldots, kk\}$.

Задача 1 (очень трудная). Докажите, что

$$(1-x)^{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty} S(n+k,n)x^n = \sum_{i=1}^{k} B_{k,i}x^i.$$

(Напомним, что степенные ряды перемножаются так же, как и многочлены, которые тоже можно рассматривать как ряды, коэффициенты которых, начиная с некоторого места, равны 0.)

Задача 2 (трудная). Докажите тождество, установленное недавно В.С.Шевелевым:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{m-j}C_{2m}^{m-j}S(m+j,j) = (2m-1)!!$$

Задача 3 (менее трудная, чем задачи 1 и 2). Докажите, что $S(n+k, n)$ является многочленом от n степени $2k$, и найдите коэффициент этого многочлена при n^{2k}.

(**Ответ.**: $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!}$.)

Мы надеемся, что нам удалось познакомить вас с «кухней» современной перечислительной комбинаторики. На этой «кухне» мы встретились с несколькими замечательными математиками, а в заключение у нас появилась возможность попробовать собственные силы в увлекательной науке, имя которой — комбинаторика.

Список рекомендуемой литературы

1. *Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И.Шварцбурд.* Алгебра и математический анализ (для школ с углубленным изучением математики). Часть II. М.: Просвещение, 1990.

2. *Ю.Ионин.* Сколько вариантов? Приложение к журналу «Квант» №2/94.

3. *Г.Радемахер, О.Теплиц.* Числа и фигуры. М.: Наука, 1966. Раздел 9 (см. также разделы 7,2 и 11).

4. *И.С.Соминский.* Элементарная алгебра (дополнительный курс). Изд. 3-е (или любое другое). М.: Наука, 1967. Глава 2.

5. *В.А.Кречмар.* Задачник по алгебре (любое издание). Раздел 9. Задачи 36—40.

Легко ли забить гвоздь?

А.КЛАВСЮК, Е.СОКОЛОВ

ОДНАЖДЫ в нашем классе разгорелся спор: можно ли с одного удара забить гвоздь? Мнения, как всегда, разделились. Одни доказывали, что никакой проблемы здесь нет. Другие, не менее горячо и аргументированно, что проблема есть — «силы не хватит».

А как же на самом деле обстоят дела? Всегда ли, размахнувшись посильнее, можно вогнать гвоздь в дерево с одного удара или есть случаи, когда одной силы недостаточно?

Давайте разберемся в этом вместе.

Итак, можно ли с одного удара забить гвоздь?

Результаты экспериментов

Прежде чем приступать к теоретическим рассуждениям, мы решили экспериментально установить, какую силу необходимо прикладывать к гвоздю для того, чтобы вдавливать его в дерево. Полученные нами результаты изображены на рисунке 1. Измерения проводились для двух сортов дерева: «мягкого» — ели и «твердого» — бука. В качестве эталонного гвоздя из всех собранных нами гвоздей (рис.2) мы выбрали обрезок длинного и толстого гвоздя — длиной $l_0 = 50$ мм и радиусом поперечного сечения $R = 2$ мм, — который показался нам наиболее подходящим для подобных экспериментов. Вдавливание производилось с помощью пресса, позволяющего измерять прикладываемую силу.

В обоих случаях зависимость получилась линейной:

$$F(x) = F_0 + \frac{F_{max} - F_0}{l_0} x,$$

где F_0 равно 0,4 кН для ели и 1,1 кН для бука, F_{max} равно, соответственно, 2,4 кН и 15,0 кН. Такую зависимость, на наш взгляд, и следовало ожидать.

При достаточно глубоком вдавливании гвоздя ($x \gg R$) в обжимающем гвоздь дереве можно выделить

Иллюстрация А.Балдина

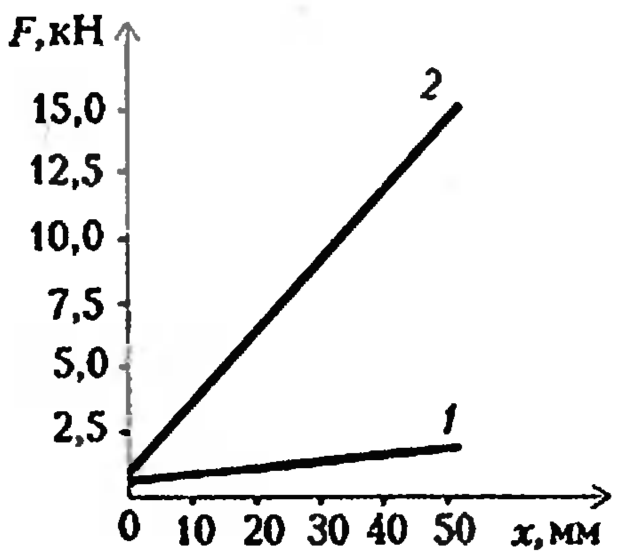


Рис.1. Экспериментальная зависимость силы сопротивления от глубины погружения (1 — ель, 2 — бук)

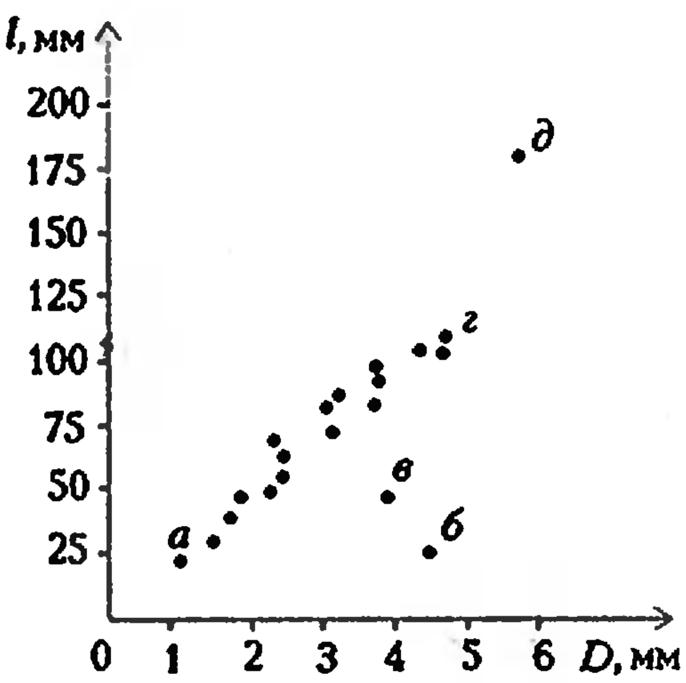


Рис.2. Параметры стандартного набора гвоздей (а — сапожный гвоздь, б — дюбель, в — экспериментальный гвоздь, г — шиферный, д — «двухсотка»)

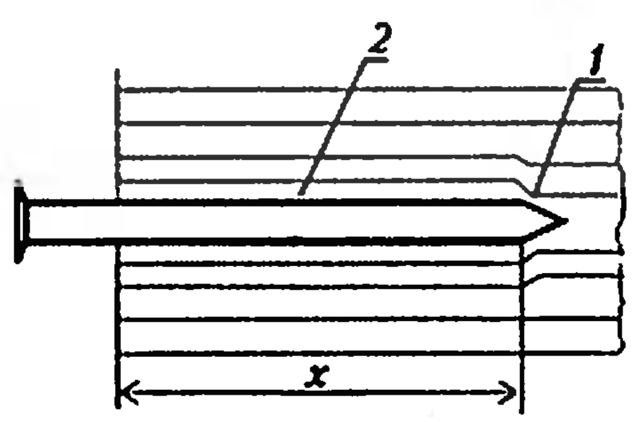


Рис.3. Распределение деформаций в дереве

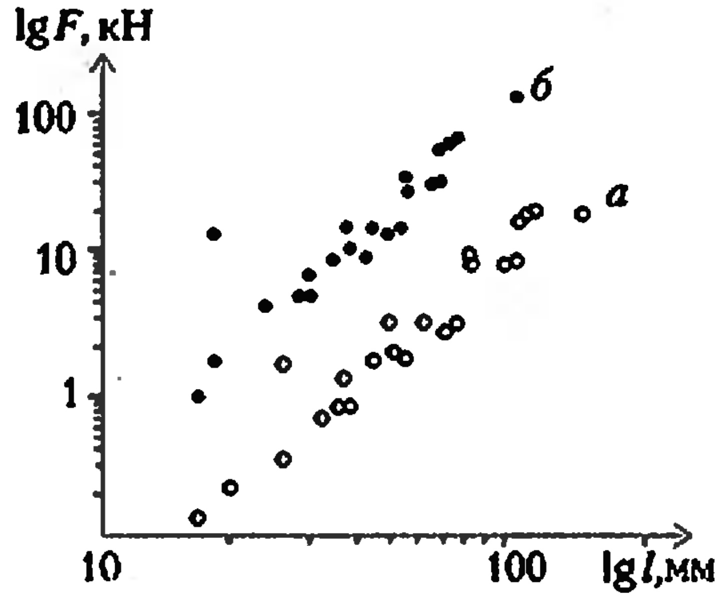


Рис.4. Силы, необходимые для вдавливания гвоздей (а — ель, б — бук)

две области с различным характером распределения напряжений (рис.3). Это, во-первых, область *1* размером порядка R вблизи острия гвоздя. Распределение напряжений здесь достаточно сложно. Однако ясно, что по мере вдавливания гвоздя картина в этой области не меняется. Следовательно, взаимодействие гвоздя с этой областью дает вклад в силу сопротивления, не зависящий от x:

$$F = \sigma_{эф} S,$$

где $\sigma_{эф}$ — некоторое характерное (эффективное) напряжение, S — площадь поперечного сечения гвоздя. (Отметим, что в опытах наблюдалось явление «застоя», которое мы связываем с периодическим образованием трещины, проходящей от острия гвоздя в глубь дерева.)

Основная часть гвоздя — область *2* — окружена равномерно сжатым деревом, обжимающим гвоздь с некоторым постоянным напряжением σ_1. При движении гвоздя возникает сила трения, величина которой прямо пропорциональна боковой поверхности погруженной части гвоздя:

$$F = 2\pi\mu\sigma_1 Rx,$$

где μ — коэффициент трения. Таким образом, сила трения является ответственной за линейную часть силы сопротивления.

Итак, с силами, необходимыми для забивания гвоздей, все ясно, и у нас есть все необходимое для проведения теоретического исследования. Полученные экспериментальные данные и записанные формулы позволят вычислить значения любых интересующих нас величин. В качестве примера мы вычислили максимальные значения сил для стандартного набора гвоздей (рис.4). Оказывается, чтобы полностью вдавить в бук великан-«двухсотку», необходимо приложить силу 78 кН (это больше, чем вес слона), а для малютки-«двадцатки» достаточно всего 1,5 кН.

Итак, приступаем к теоретическому исследованию. Что же может помешать вбить гвоздь одним ударом?

Аргументы «за» и «против»

Первый аргумент «против», который приходит на ум при взгляде на полученные числовые значения, формулируется очень просто: «силы не хватит». Действительно, силы великоваты для того, чтобы вдавить гвоздь в дерево просто рукой. Но ведь у нас в руке молоток. А какой «выигрыш в силе» он дает? (Каждый ли с ходу ответит на этот вопрос?)

Давайте разберемся с возможностями молотка. Здесь удобно описать ситуацию формально. Тело (молоток), имеющее кинетическую энергию E_k, налетает на пружину (гвоздь) жесткостью k. Чему будет равно максимальное значение силы упругости при сжатии пружины? Узнали? Это известная школьная задача. Ее ответ:

$$F = \sqrt{2kE_k}.$$

Молоток очень «умный» инструмент — чем жестче предмет, по которому он бьет, тем больше сила. Эта формула отвечает и на массу других вопросов: почему удары по мягким частям тела менее болезненны, чем по твердым, почему трудно вбить гвоздь в незакрепленную доску (она просто «пружинит») и т.д.

Оценим с помощью этой формулы силы, возникающие при ударе молотком по эталонному гвоздю. Жесткость гвоздя легко определить с помощью известной формулы

$$k = E\frac{S}{l_0},$$

где $E = 2\cdot 10^{11}$ Па — модуль Юнга стали. Что касается кинетической энергии молотка, то, разумеется, она зависит от «силы удара». Давайте для оценок рассмотрим два случая: удар «средней силы» и удар «со всего плеча». За «удар средней силы» примем удар, эквивалентный падению молотка (кувалды) с высоты 1 м. Кинетическая энергия для такого удара может быть рассчитана по формуле

$$E_k = mgh.$$

Название «со всего плеча» говорит само за себя. Для оценки энергии в этом случае примем, что по порядку величины она совпадает с той максимальной энергией, которую мы способны сообщить телу при бросании. При таком допущении нам достаточно прикинуть, на какое максимальное расстояние мы способны кинуть молоток и толкнуть кувалду. Максимальная дальность полета тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом $\alpha = 45°$ к

Таблица

Удар «средней силы»				
	m(кг)	h(м)	E_k(Дж)	F(кН)
М.	0,5	1,0	5	25
К.	10	1,0	100	100

Удар «со всего плеча»			
	L(м)	E_k(Дж)	F(кН)
М.	40	100	100
К.	20	1000	300

горизонту, равна

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{v_0^2}{g},$$

поэтому

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgL}{2}.$$

В таблицу мы записали оценки кинетической энергии обычного молотка (М.) и кувалды (К.) для ударов «средней силы» и «со всего плеча». Туда же мы занесли и вычисленные значения максимальной силы (F). Из таблицы видно, что даже при ударе «средней силы» силы вполне хватает. Аналогично обстоит дело и с другими гвоздями. «Запас силы» довольно значителен, особенно для гвоздей малых размеров, и в случае удара кувалдой «со всего плеча» на два порядка превышает максимальное значение силы сопротивления.

Справедливости ради отметим, что в действительности такие силы возникнут лишь в том случае, если гвоздь упирается в материал гораздо более жесткий, чем сталь. При забивании гвоздя в дерево фактически работают две последовательно включенные пружины: гвоздь и дерево.[1] Так что общая жесткость этой системы пружин равна

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Однако и в этом случае запас в силе существенный. Действительно, для учета смягчающего действия дерева оценим его жесткость формулой

$$k_2 = E_д R.$$

Возможность такой оценки видна из следующих рассуждений. Вообще говоря, «деревянная пружина» у нас очень странная – полупространство, заполненное деревом. Но при надавливании гвоздя существенным образом деформируется не все полупространство, а лишь полусферическая область вблизи острия гвоздя, которая больше похожа на стандартную пружину. Пространственный масштаб у нас один – радиус гвоздя R, поэтому естественно оценить длину этой области как R, а площадь как R^2. Отсюда и получается выписанная нами формула. Приняв модуль Юнга для дерева $E_д = 5\cdot10^{10}$ Па, для удара молотком «со всего плеча» по комбинированной пружине получим

$$F = 80 \text{ кН},$$

чего по-прежнему вполне достаточно.

Итак, с силой проблем нет.

Рассмотрим второй аргумент «против» – «энергии не хватит». В этом случае убедиться в обратном достаточно просто. Для того чтобы забить гвоздь, энергия молотка должна превышать значение

$$E_{min} = A_{тр} + E_{p1} + E_{p2},$$

где $A_{тр} = (F_0 + F_{max})l_0/2$ – работа против силы трения, $E_{p1,2}$ – потенциальные энергии деформированных дерева и гвоздя. Первое слагаемое гораздо больше двух остальных. Например, для потенциальной энергии сжатия гвоздя можно записать

$$E_{p2} = \frac{\sigma^2}{2E}V \approx \frac{F_{max}}{SE}\frac{F_{max}}{2S}l_0 S \approx$$
$$\approx \frac{F_{max}}{SE}A_{тр} \ll A_{тр}.$$

Поэтому для забивания гвоздя достаточно, чтобы энергии молотка хватило для преодоления силы трения. Для эталонного гвоздя это составляет в случае ели 70 Дж, в случае бука – 400 Дж.

Таким образом, удара кувалдой должно хватить.

Так же оптимистично выглядят результаты расчета и для стандартных гвоздей (рис.5). В случае ели проблемы могут возникнуть лишь с вбиванием «двухсотки». Для бука энергии требуется побольше, но даже для

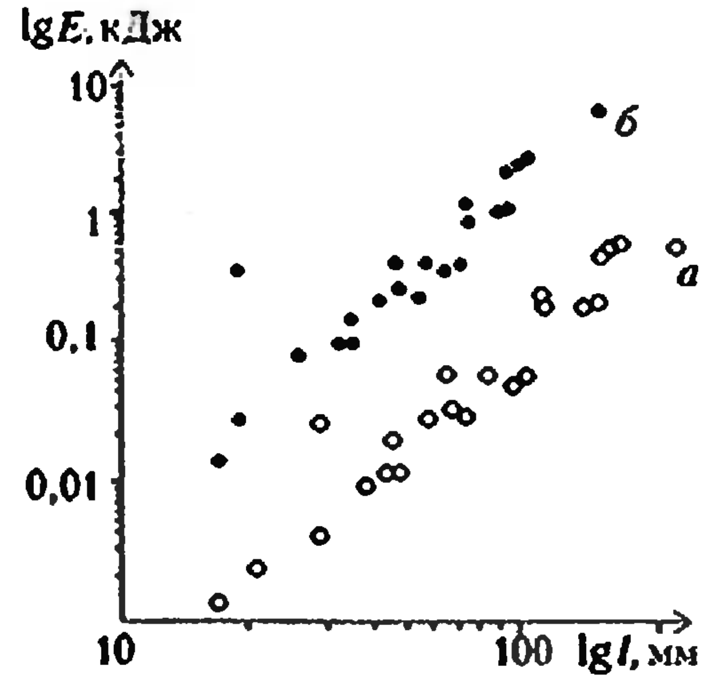


Рис.5. Энергии, необходимые для вдавливания гвоздей (а – ель, б – бук)

«соток» соответствующие значения порядка 1000 Дж.

Последний и окончательный аргумент

Не обнаружив явных причин, запрещающих вбивать гвозди с одного удара, мы вернулись к эксперименту. Стали забивать гвозди, не жалея сил. И очень скоро все прояснилось. То, что раньше мы списывали на неудачу – при сильном ударе гвозди не забивались в бук, а просто гнулись, – и есть главное. Научное название этого эффекта – неустойчивость Эйлера.

Обычно неустойчивость Эйлера демонстрируют следующим образом. Пусть на шарнирно закрепленный стержень действует сила F (рис.6). Пока эта сила невелика, гвоздь прекрасно выдерживает нагрузку. Но как только сила превысит критическое значение

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

стержень становится неустойчивым. Малейший его изгиб начинает катастрофически расти с ростом силы, и стержень ломается. (Такое поведение стержня само по себе удивительно. Оно совсем не похоже на обычное поведение упругих тел, к которому мы привыкли, – деформации постепенно увеличиваются с ростом приложенной силы. Обсуждение причины этого увело бы нас в сторону, поэтому ограничимся лишь замечанием, что связано это с экстремальным свойством отрезка прямой – он короче любой другой линии, соединяющей две точки.)

Величины, входящие в выражение для критической силы, могут быть

[1] *«Справедливости ради» отметим, что молоток – тоже колебательная система, и время прохождения волны вдоль молотка и обратно сильно влияет на качество удара. Так что у нас не две пружины, а три. Кроме того, конец гвоздя при каждом ударе углубляется в дерево, и сила сопротивления при этом меняется слабо. Поэтому дерево не совсем пружина. Но при численных оценках «с запасом» эти факторы не очень существенны. (Прим. ред.)*

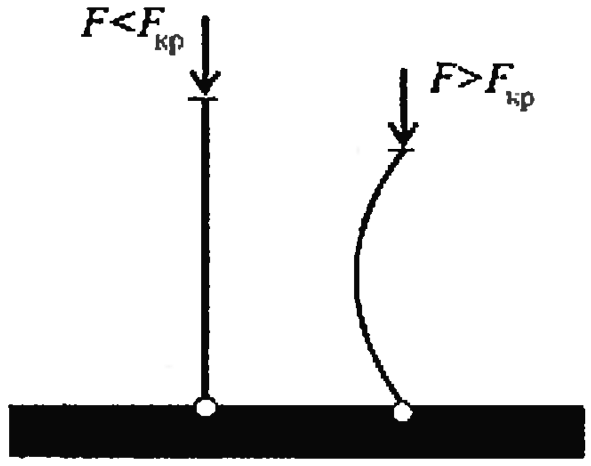


Рис.6. Неустойчивость Эйлера

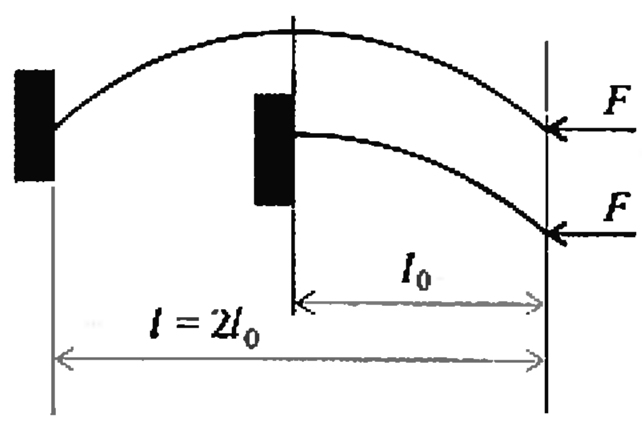


Рис.7. Половина шарнирно закрепленного стержня ведет себя как консольно закрепленный стержень

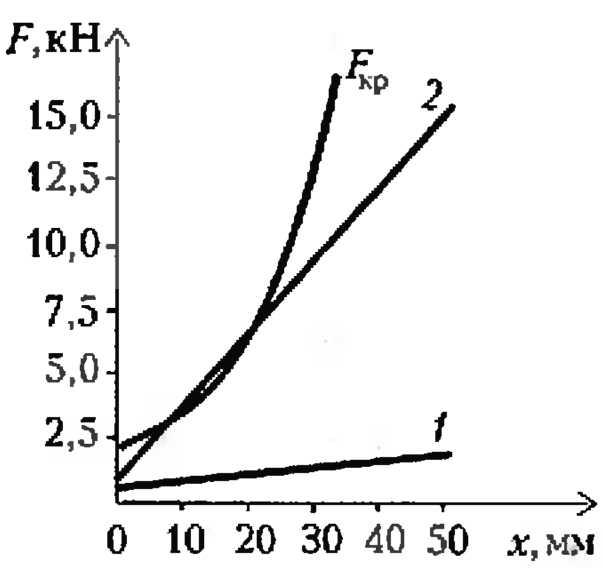


Рис.8. Гвоздь можно забить, если сила сопротивления меньше критической силы

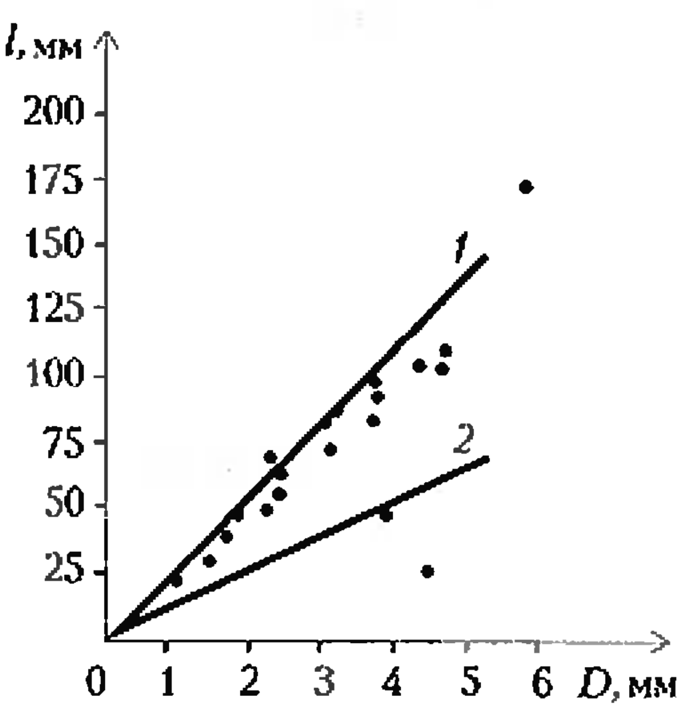


Рис.9. «Забиваемость» гвоздей (все гвозди, лежащие ниже прямой 1, можно забить в ель, а лежащие ниже прямой 2 — в бук)

легко вычислены для нашего эталонного гвоздя: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па — модуль Юнга стали, l — длина гвоздя, величина I называется моментом инерции поперечного сечения и зависит от размера и формы поперечного сечения гвоздя — так, для гвоздя стандартного круглого сечения $I = \pi R^4/4$ (а например, для старинного кованного гвоздя квадратного сечения $I = a^4/12$, где a — сторона квадрата). Единственное, нам надо несколько видоизменить формулу Эйлера для $F_{кр}$, так как мы рассматриваем уже частично вбитый гвоздь, который следует считать не шарнирно, а консольно закрепленным стержнем (у которого фиксированы и точка опоры, и направление стержня в этой точке). Условие устойчивости в этом случае легко получить, рассматривая равновесие шарнирно закрепленного стержня вдвое большей длины $l = 2l_0$ (рис.7). Если мысленно провести через середину такого стержня плоскость, оставшаяся часть гвоздя будет представлять собой консольно закрепленный стержень. Поэтому критическая сила для консольно закрепленного стержня равна критической силе для шарнирно закрепленного стержня вдвое большей длины:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l_0^2}.$$

Вот теперь мы готовы дать самый исчерпывающий ответ. [2]

На рисунке 8 для эталонного гвоздя изображена зависимость силы сопротивления и критической силы, равной

$$F_{кр}(x) = \frac{\pi^2 EI}{4(l_0 - x)^2} = \frac{F_э l_0^2}{(l_0 - x)^2},$$

где $F_э = 2{,}48$ кН, от глубины погружения x. Для ели эти кривые не пересекаются — гвоздь вбить в ель можно, и при желании с одного удара. В случае бука кривые пересекаются при x = 10 мм. Поэтому в бук гвоздь можно вбить лишь на глубину 10 мм, после этого он будет гнуться. Именно такое поведение гвоздя мы наблюдали при снятии экспериментальной зависимости. Чтобы полностью вдавить эталонный гвоздь в бук, нам пришлось на неустойчивом участке (10 – 19 мм) удерживать его плоскогубцами, не давая гнуться.

Подведем главный итог наших исследований. Для забивания гвоздей важна не столько сила, сколько взаимное расположение кривых, соответствующих росту силы сопротивления и силы Эйлера. Если эти кривые пересекаются, гвоздь полностью вбить в дерево с одного удара невозможно, даже если силы в избытке.

[2] *Отметим, что условие неустойчивости Эйлера относится к случаю статических нагрузок. Применение этого условия к динамическим, а тем более к ударным нагрузкам, может претендовать лишь на качественное описание явления и не может дать «исчерпывающий ответ» в количественном смысле. (Прим.ред.)*

Калейдоскоп

Осваивая искусство забивания гвоздей, мы с удивлением обнаружили, что с ним связано множество интересных вопросов и поучительных задач. Мы решили поделиться с читателями некоторыми из обнаруженных нами закономерностей (попробуйте самостоятельно обосновать их).

Итак, знаете ли вы, что...

...гвоздь лишь тогда можно вбить в дерево (т.е. соответствующие кривые не пересекутся), когда его размеры удовлетворяют «условию вбиваемости» $l_0/R < C$, где C — некоторая постоянная, характеризующая породу дерева. Согласно нашим экспериментальным данным, для ели C равно 45,9, для бука — 24,8.

...среди стандартных гвоздей наиболее вбиваемы гвозди малых размеров (рис.9) — начиная с «шестидесяток» всех их можно забить в ель. Среди «соток» вбиваемы в ель лишь достаточно толстые представители, а великану-«двухсотке» следовало бы увеличить свой диаметр почти вдвое. Бук — чрезвычайно твердый материал для стандартных гвоздей, полностью в него можно вбить лишь дюбель.

...легкими постукиваниями гвоздь в дерево не вбить. Для того чтобы гвоздь входил в дерево, а не пружинил, энергия молотка должна превосходить определенную «пороговую» энергию. Например, заключительные удары при забивании стандартного гвоздя в бук должны нести в себе энергию не менее 0,8 Дж.

...если вам удалось забить гвоздь на треть его длины, дальше бейте смело — он не согнется (теорема!).

Наука в двадцатом веке

В.ВАЙСКОПФ

Часть 2 (1946 — 1970)

Этот период — самое выдающееся время для всех наук. То, что произошло во время Второй мировой войны, имело на науку, а особенно на физику, огромное влияние. К удивлению правительств, физики успешно стали главными инженерами во многих военных проектах, например — в проекте создания атомной бомбы. Сугубый теоретик Р.Оппенгеймер руководил созданием атомной бомбы. Э.Ферми создал ядерный реактор. Ю.Вигнер занимался созданием реактора, нарабатывающего плутоний, а Д.Швингер создал теорию для радаров. Более того, ученые показали себя прекрасными организаторами работ в крупных коллективах.

Когда Вторая мировая война окончилась, у многих было впечатление, что физики сыграли в победе немаловажную роль. Во всяком случае, нет сомнений в том, что радары просто спасли Великобританию и резко снизили угрозу от подводных лодок для трансатлантических конвоев. Есть мнение, что атомная бомба привела к немедленному окончанию войны со стороны Японии. Физика и вся наука в целом заслужили очень высокую оценку. Это привело к повышению зарплаты ученых и к обширной финансовой поддержке со стороны государства. Были созданы многочисленные фонды для финансирования именно науки: Фонд морских исследований, Национальный научный фонд для поддержки фундаментальных отраслей науки, Национальный институт здоровья для финансирования медицинских и биологических исследований, Комиссия по атомной энергии для поддержки работ в ядерной физике и физике элементарных частиц.

Можно выделить две основные причины, почему науку стало поддерживать государство. Во-первых, военный опыт показал, что от ученых может быть большая польза и в них выгодно вкладывать деньги, даже в малопонятные фундаментальные исследования. Во-вторых, правительство поняло, что стоит поддерживать научное сообщество в сытом и многочисленном состоянии, поскольку оно может опять понадобиться. Первые десять послевоенных лет исследования щедро финансировались без всяких запросов о целях и результатах работ. Потом чиновники стали все больше интересоваться, куда идут деньги, и преимущественно направлять их на работы с ярко выраженной военной или коммерческой тематикой. Однако фундаментальной науке удавалось безбедно существовать вплоть до семидесятых годов.

И результаты такой финансовой поддержки были совершенно потрясающими. Прогресс естественных наук за три послевоенных десятилетия превзошел все ожидания, наука приобрела новое лицо. В кратком обзоре невозможно даже просто перечислить все результаты. Ограничимся самыми-самыми, даже без упоминания авторов. Выбор достаточно произволен и определяется, в основном, ограниченными познаниями автора.

В квантовой теории поля: создан метод перенормировок, который позволяет избежать бесконечностей при расчетах и дает возможность проводить их с любой требуемой точностью.

В физике элементарных частиц: осознание кварковой структуры адронов, обнаружение большого количества частиц, прекрасно объясняемых кварковой моделью, обнаружение тяжелого электрона и двух типов нейтрино (третий тяжелый лептон и его нейтрино были найдены уже в следующем периоде), обнаружение несохранения комбинированной CP-четности, объединение электромагнитного и слабого взаимодействий.

В ядерной физике: модель ядерных оболочек, детальная теория ядерных реакций, открытие и анализ вращательных и коллективных степеней свободы в ядрах.

В атомной физике: лэмбовский сдвиг, объяснение тонкой структуры спектральных линий с помощью квантовой электродинамики, первые мазеры и лазеры с широчайшим спектром применений, нелинейная оптика.

В физике твердого тела: развитие полупроводников и транзисторов, объяснение сверхпроводимости, поверхностных свойств вещества, новый взгляд на фазовые переходы и хаос.

В астрономии и космологии: теория Большого взрыва и ее следствия, галактические кластеры, микроволновое реликтовое излучение, открытие квазаров и пульсаров.

В химии: синтез сложных органических молекул, определение структуры очень больших молекул физическими методами — такими как рентгеновская спектроскопия и ядерный магнитный резонанс, изучение механизмов реакций с использованием молекулярных пучков и лазеров.

В биологии: создание молекулярной биологии как синтеза генетики и биохимии, подтверждение, что именно ДНК переносит генетическую информацию, и открытие структуры ее двойной спирали, начало расшифровки генетического кода, анализ процесса синтеза белков, определение структуры клетки и ее составных частей.

В геологии: развитие и подтверждение модели тектонических плит с использованием новых точных приборов, открытие океанических перетоков с использованием сложной электронной аппаратуры.

Множество открытий и новых результатов базировались на новых достижениях в приборостроении, связанных с военными исследованиями в электронике и ядерной физике. Одним из решающих новых инструментов стал компьютер. А его последующее совершенствование — вероятно, самое быстрое за всю историю

Продолжение. Начало см. в предыдущем номере журнала.

науки. Он принес с собой новые методы оценки результатов, новые пути моделирования природных процессов. Следуя меткому замечанию С.Швебера, можно сказать: «Теперь есть три типа ученых: теоретики, экспериментаторы и компьютерщики».

Несмотря на фантастическое продвижение с помощью компьютеров, возникли и опасности, связанные с их широким применением. Если компьютер используется для определения следствий теории, то кто должен понимать эти следствия — компьютер или ученый? Вычисления с помощью машин стали порой подменять собой размышление и понимание. Аналогичная опасность связана с чрезмерным применением компьютеров в обучении. Все хорошо в меру.

В первые два послевоенных десятилетия в естественных науках царила монополия США: большинство открытий во всех отраслях знания шло из-за океана. Естественной причиной тому была Вторая мировая война и полная перестройка многих стран Европы и Восточной Азии. Но все же, в Англии начали исследовать космические лучи, раскручивались работы по элементарным частицам в Италии и Франции. Ситуация зеркально изменилась по сравнению с 1920 годом: теперь уже европейцы для завоевания научного авторитета должны были поработать некоторое время в Штатах. Европа превратилась в провинцию!

В шестидесятые годы европейские и японские исследования начинают поднимать голову, приобретать независимость от США. Создается целый ряд крупных европейских научных организаций: Европейский центр ядерных исследований, Европейская молекулярно-биологическая лаборатория, Южная европейская обсерватория. В некоторых областях Европа и Япония начинают обгонять США.

Происходят важные структурные перемены в социальном устройстве науки, особенно в астрономии, ядерной физике и физике элементарных частиц. Быстро растет сложность, а с ней и стоимость экспериментальных установок, но правительство продолжает финансировать их создание. Научные коллективы, работающие над одной задачей, достигают нескольких десятков человек (в третьем периоде это число перевалит за тысячу). Особенно это характерно для физики элементарных частиц. В биологии, химии, физике твердого тела продолжаются работы достаточно традиционными методами — небольшими группами на лабораторных столах.

Большие коллективы приносят с собой и новую социологию. Необходим лидер коллектива, который должен отвечать не только за научные раздумья, но и за всю организацию работ в группах и подгруппах, а также за обеспечение финансовой поддержкой. Появляется новый тип личностей, совершенно отличный от научных лидеров прошлого. Определенные сложности создает широкое привлечение молодых аспирантов и студентов к исследованиям. Им сложно осознать свое место в движении науки, поскольку их усилия просто теряются в общем потоке. Чтобы привлечь в свои ряды молодежь, отдельные подгруппы начинают выдвигать темы самостоятельных исследований.

Развитие огромных проектов приводит к тому, что возникает «большая наука» и «маленькая наука». Маленькой занимаются небольшие группы за небольшие деньги. Большая же возникает в астрономии, физике частиц, иногда в биологии и физике твердого тела, когда осуществляются грандиозные проекты. А там, где нужны большие деньги, именно проблемы финансирования начинают играть решающую роль.

Возникает и другое расслоение: на прикладную и неприкладную науку. Под прикладной понимаются отрасли, для которых применения результатов очевидны или легко планируемы. Термин «неприкладная» означает, что сегодня применения не очевидны. К сожалению, давно уже философская или интеллектуальная значимость не рассматриваются как применение. Однако понятно, что можно вполне предвидеть применение некоторых современных открытий в будущем, поэтому мы будем использовать и термин «неприкладная сегодня».

Прикладная наука — это часть ядерной физики, работающая с реакторами и радиоактивностью, атомная и молекулярная физика, физика твердого тела, физика плазмы, химия, науки о Земле и, конечно, биология с широким спектром применимости в медицине, сельском хозяйстве и производстве продуктов питания.

Физика элементарных частиц, некоторые разделы ядерной физики, астрономия и космология имеют колоссальное значение в смысле познания Природы, но применимость их иллюзорна. Их можно даже образно называть «космическими науками», тогда как прикладные области разумно называть «земными». Процессы, изучаемые в космических науках, слишком далеки во времени и пространстве от обыденных земных нужд. Несомненно, это огромное достижение — получить возможность изучать образование галактик во Вселенной или процессы внутри звезд или же создать при помощи ускорителей условия, существовавшие через несколько секунд после рождения Вселенной. Естественно, такие исследования очень дороги, потому что трудно создавать космические условия на Земле. Эти явления как бы отделены от человеческого общества, да и от других наук.

Конечно, деление на науку прикладную и неприкладную сегодня достаточно относительно. Даже физика элементарных частиц может дать прикладные применения. Несколько десятилетий назад Л.Альварес предложил запустить термоядерную реакцию, посадив на орбиту вокруг атомного ядра вместо электрона мюмезон. К сожалению, эту идею реализовать не удалось. Прикладные применения физики элементарных частиц более уместно было бы называть «побочным продуктом». Часто высочайшие требования к точности и надежности, которые обязательны в экспериментальных установках, находят применения и в других областях. Д.Шарпак изобрел проволочные камеры, которые очень точно измеряют координату пролетающей через них частицы; несколько лет назад ему дали Нобелевскую премию за это, а его камеры с успехом применяются в медицине, биологии и материаловедении. Некоторые математические идеи квантовой теории поля с успехом применяются в физике конденсированных сред. Можно надеяться, что в дальнейшем таких побочных продуктов будет больше.

Неприменимость «космических» наук сегодня приводит к интересным последствиям: к иерархии различных отраслей физики, которые все больше и больше отдаляются друг от друга. Наука о веществе делится на

(Продолжение см. на с. 25)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 — 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1616» или «Ф1623». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1616 и М1617 предлагались на Соровской олимпиаде по математике 1997 года.

Задачи М1616 — М1620, Ф1623 — Ф1627

М1616. Дана правильная треугольная пирамида $ABCD$ с плоскими углами α при вершине D. Плоскость, параллельная основанию, пересекает ребра DA, DB, DC в точках A_1, B_1, C_1. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезали по пяти ребрам A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB и полученную развертку уложили на плоскость. При каких α развертка будет (частично) накрывать сама себя?

А.Тарасов, И.Шарыгин

М1617*. Дан правильный шестиугольник со стороной 100. Каждая его сторона разделена на 100 равных частей, и через точки деления проведены всевозможные прямые линии, параллельные сторонам шестиугольника (образующие сетку единичных правильных треугольников). Рассмотрим *произвольное* покрытие шестиугольника единичными ромбами, каждый из которых состоит из двух соседних треугольников сетки. Сколько существует линий сетки, разрезающих пополам (на два треугольника) а) 17 ромбов; б) k ромбов (для каждого $k \geq 1$)? (Зависит ли ответ от покрытия?)

В.Алексеев

М1618*. В вершины правильного n-угольника из его центра проведены n векторов и из них выбраны несколько (не все), сумма которых равна нулю. Докажите, что концы некоторой части выбранной совокупности векторов образуют правильный многоугольник (две симметричные относительно центра точки считаются правильным «двуугольником»), если а) $n = 6$; б) $n = 8$; в) $n = 9$; г) $n = 12$. д) Будет ли аналогичное утверждение верным при любом n?

В.Сендеров

М1619*. Числа x, y, z удовлетворяют условиям

$$x^2 + xy + y^2 = 3,\ y^2 + yz + z^2 = 16.$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $xy + yz + zx$.

М.Волчкевич

М1620*. Через точку O плоскости проведено n прямых, делящих плоскость на $2n$ углов. В каждый из них вписана окружность, касающаяся сторон на расстоянии 1 от точки O. Лучи занумерованы по порядку, начиная с луча OA_1 (рис. 1). Для произвольно выбранной на луче OA_1 точки M_1 строится ломаная $M_1M_2M_3...M_{2n}M_{2n+1}$, вершина M_i которой лежит на

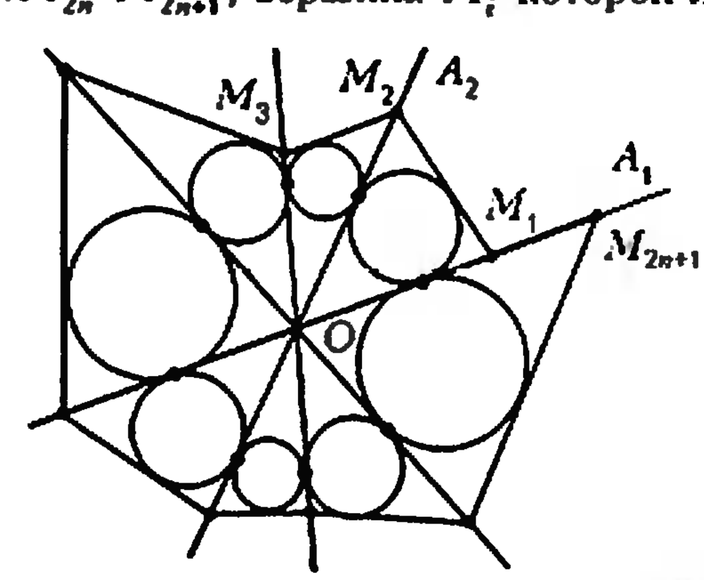


Рис.1

OA_i ($i = 1, 2, ..., 2n$), вершина M_{2n+1} — снова на OA_1, а звено M_iM_{i+1} касается окружности, лежащей в угле A_iOA_{i+1}. Докажите а) для $n = 3$; б) для любого n, что если для некоторой точки M_1 ломаная оказалась замкнутой ($M_{2n+1} = M_1$), то она получится замкнутой при любом выборе точки M_1.

Н.Васильев

Ф1623. На гладком горизонтальном столе находится клин массой M с углом 45° при основании, на нем — клин такой же массы M с таким же углом, так что верхняя плоскость второго клина горизонтальна, а на ней лежит кубик массой m (рис.2). Всю конструкцию удерживают неподвижной. Какую скорость приобретет кубик через время τ после растормаживания системы? Трением пренебречь. Считать, что за указанный интервал времени характер движения не меняется.

З.Рафаилов

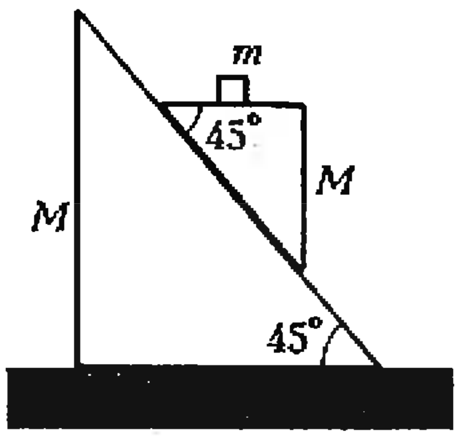


Рис.2

Ф1624. Два маленьких шарика массой M каждый находятся на расстоянии L друг от друга и в начальный момент имеют одинаковые по величине и противоположно направленные скорости v_0, перпендикулярные отрезку, соединяющему шарики. Никаких внешних сил нет. Учитывая гравитационное взаимодействие шариков, найдите максимальное расстояние между ними в процессе движения и минимальные скорости шариков.

Р.Шариков

Ф1625. В кубическом сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится гелий при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па. В стенке сосуда открывают отверстие площадью $S = 1$ см^2 и через время $\tau = 0{,}01$ с закрывают. Снаружи — вакуум. Оцените изменение температуры газа в сосуде после установления в нем равновесия. Считайте, что открывание и закрывание отверстия производят очень аккуратно — не создавая лишних потоков газа.

А.Повторов

Ф1626*. В длинном прямом проводе диаметром d, сделанном из металла с удельным сопротивлением ρ, течет постоянный ток I_0. Известно, что необходимое для протекания тока электрическое поле в проводе создают поверхностные заряды. В некоторой точке поверхности плотность этих зарядов составляет σ_1. Найдите величину поверхностной плотности зарядов в другой точке поверхности — на расстоянии L вдоль провода от первой.

А.Зильберман

Ф1627. Конденсатор емкостью C подключают к параллельно соединенным катушкам, индуктивности которых L_1 и L_2 (рис.3). В начальный момент конденсатор не заряжен, через первую катушку течет ток I_0, ток второй катушки равен нулю. Найдите максимальный заряд конденсатора и максимальную величину тока в точке A.

Р.Александров

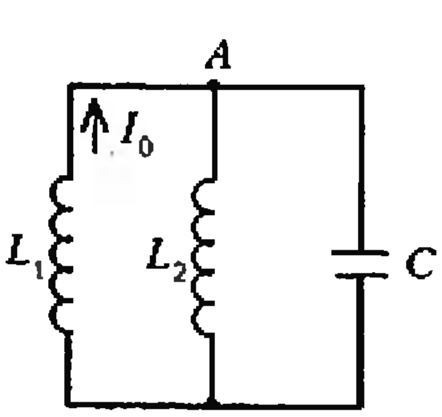


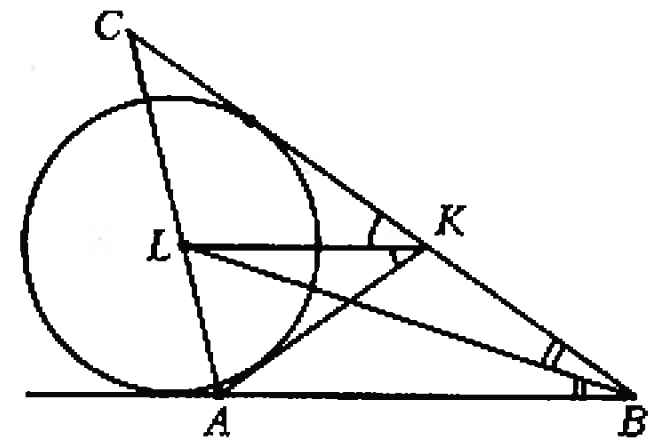
Рис.3

Решения задач М1591 — М1600, Ф1608 — Ф1612

Решения задач М1596, М1598 и М1600 будут опубликованы позже.

М1591. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AK. Оказалось, что KL — биссектриса треугольника AKC. Найдите угол BAC.*

Ответ: $\angle BAC = 120°$. Точка L одинаково удалена от прямых AK, BC и AB, поскольку она лежит на



биссектрисах KL и BL углов AKC и ABC соответственно (см. рисунок). Другими словами, L — центр вневписанной окружности треугольника AKB. Значит, точка L лежит на биссектрисе внешнего угла A треугольника ABC. Вспомнив еще, что AK — биссектриса угла BAC, получаем, что лучи AL и AK делят полуплоскость, ограниченную прямой AB, на три равных угла: каждый составляет 60°.

С.Токарев

М1592. *Можно ли представить число 1997^{1997} в виде суммы кубов нескольких идущих подряд целых чисел?*

Ответ: нет.

Последовательно находим остатки, которые дают суммы кубов $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ при делении на 7 (равенство $a \equiv b$ будет означать, что $a - b$ делится на 7):

$$S_3(0) = 0^3 \equiv 0,$$
$$S_3(1) = 1^3 \equiv 1,$$
$$S_3(2) = 1^3 + 2^3 \equiv 2,$$
$$S_3(3) = \left(1^3 + 2^3\right) + 3^3 \equiv 2 - 1 \equiv 1.$$

Так как $4^3 \equiv (-3)^3$, ..., то продолжение в скобках «зеркально» относительно второй единицы: (0, 1, 2, 1, 2, 1, 0). Следовательно, сумма нескольких последовательных кубов может давать в остатке 0, 1, 2, −1, −2. Но $1997 \equiv 2$, а $2^{1997} = 2^{1995} \cdot 2^2 = \left(2^3\right)^k \cdot 2^2 \equiv 1^k \cdot 4$. Противоречие.

А.Егоров

М1593. *Имеется набор гирек: а) 1, 2, 4, ... $2^8 = 256$ граммов, б) 1, 2, 4, ..., $2^9 = 512$ граммов. Разрешается класть гирьки на обе чашки весов. Какие грузы можно взвесить наибольшим числом способов?*

Будем решать задачу в общем виде: какую массу можно взвесить наибольшим числом способов, и каким именно, используя набор гирь 1, 2, 2^2, ..., 2^k (гири разрешается класть на обе чаши весов; мы не будем различать способы, отличающиеся переменой чашек). Обозначим через $S(k, m)$ число способов взвесить массу m. Например, $S(0, 1) = 1$; $S(k, 1) = k + 1$ при $k \geq 1$; если $m \geq 2^{k+1}$, то $S(k, m) = 0$.

Мы должны найти (для каждого k) максимальное число $N_k = \max_m S(k,m)$ среди всех $S(k, m)$ и заодно выяснить, для каких m этот максимум достигается.

Удобно конкретный способ взвешивания обозначать такой парой: (сумма гирь на левой чашке; сумма гирь на правой чашке). Например, наибольшее значение $S(2, m)$ равно 3; оно достигается при $m = 1$: $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(1 + 2; 4)$ и при $m = 3$: $(0; 1 + 2)$, $(1; 4)$, $(2; 4 + 1)$, так что $N_2 = 3$. Легко видеть, что $N_0 = 1$ (достигается при $m = 0$ и $m = 1$), $N_1 = 2$ (при $m = 1$). Нетрудно показать, что $N_3 = 5$ (достигается при $m = 3 = \mathit{11}$ и $m = 5 = \mathit{101}$). Наклонные цифры означают здесь двоичную запись числа. Пользуясь ею и продолжая эксперимент дальше, можно угадать желанный ответ. Мы сформулируем его ниже.

Пока заметим, что если $m > 2^k$, то $S(m - 2^k, k) > S(m,k)$. В самом деле, при взвешивании $m > 2^k$ обязательно используется гиря 2^k, убрав которую, мы получим взвешивание m без этой гири; но m имеет также взвешивания, использующие 2^k. Таким образом, оптимальные m не превосходят 2^k.

Лемма 1. *Если* $m \leq 2^k$, *то*

$$S(m, k) = S(2^k - m, k).$$

Рассмотрим взвешивание m двух типов: (А) использующие гирю 2^k и (В) не использующие ее. Ниже мы считаем, что 2^k не входит в суммы L и R (состоящие из $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$).

(А) Взвешиванию $(L, R + 2^k)$ массы $R + 2^k - L = m$ сопоставим взвешивание (L, R) массы $2^k - m = L - R$.

(В) Взвешиванию (L, R) массы $R - L = m$ сопоставим взвешивание $(L + 2^k, R)$ массы $L + 2^k - R = 2^k - m$.

Как нетрудно проверить, мы установили взаимно однозначное соответствие между всеми возможными способами взвешивания масс m и $2^k - m$. (Ясно, что при взвешивании массы $m \leq 2^k$ гиря 2^k должна быть на более тяжелой чаше весов.) Лемма доказана.

Появившие в лемме 1 два множества взвешиваний (А) и (В) будут еще использованы. Ниже мы считаем, что $2^{k-1} \leq m < 2^k$ и положим $n = 2^k - m$.

Рассмотрим любое взвешивание $(L, R + 2^k)$ массы m типа (А); ясно, что 2^{k-1} не входит в R (так как $m < 2^k$, $1 + 2 + \ldots + 2^{k-2} < 2^{k-1}$). Построим по нему взвешивание массы $m - 2^{k-1}$: $(L, R + 2^{k-1})$, если 2^{k-1} не входит в L, и $(L - 2^{k-1}, R)$ — если входит (мы просто убираем равные массы 2^{k-1} с обеих чаш). Мы получили способ взвешивания массы $m - 2^{k-1}$ набором гирь $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$.

Рассмотрим теперь любое взвешивание (L, R) типа (В). Если $R - L = m$, то в R должна входить гиря 2^{k-1} (ведь $m > 2^{k-1}$, и остальных гирь не хватит). Построим взвешивание $(L, R - 2^{k-1})$ массы $2^{k-1} - m$, использующее лишь набор гирь $1, 2, \ldots, 2^{k-2}$.

Ясно, что наши конструкции, как и в лемме 1, обратимы и дают взаимно однозначные соответствия. Тем самым доказана следующая

Лемма 2. *При* $2^{k-1} \leq m < 2^k$

$$S(k, m) = S(k - 1, m - 2^{k-1}) + S(k - 2, m - 2^{k-1}).$$

Отсюда следует, что максимум левой части (по m) не превосходит суммы максимумов слагаемых в правой; поэтому $N_k \leq N_{k-1} + N_{k-2}$. Но оказывается, что на самом деле выполняется равенство

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2}. \qquad (1)$$

Дело в том, что существует масса $m \geq 2^{k-1}$ такая, что на массе $m - 2^{k-1}$ достигается максимум и N_{k-1}, и N_{k-2}; при этом, разумеется, на m достигается максимум N_k. Это утверждение проверяется по индукции: максимум $S(k, m)$ достигается на двух значениях m

$$\mathit{1010...101} \text{ и } \mathit{1010...1011} \qquad (2)$$

(дающих в сумме $2^k = \mathit{100...0}$); ведь переход от $m - 2^{k-1}$ к m при $m > 2^{k-1}$ — это просто добавление *1* в k-м разряде.

Эта индукция иллюстрируется табличкой, помещенной ниже. (Какое из двух чисел (2) играет роль m, а какое — n, зависит от четности k.) Итак, мы доказали, что N_k удовлетворяет рекуррентному соотношению (1), $N_0 = 1$, $N_1 = 2$, так что N_k равно $(k + 1)$-му члену F_{k+1} ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ... Поэтому ответы на вопросы а) и б): $N_8 = 55$, $N_9 = 89$.

Таким образом, ответы на вопросы задачи: а) 85 и 171; б) 171 и 341. Это — числа с двоичными записями *1010101*, *10101011* и *101010101*.

k	n	m	2^k	N_k
2	*1*	*11*	4	3
3	*11*	*101*	8	5
4	*101*	*1011*	16	8
5	*1011*	*10101*	32	13
...	...	...	...	...
8	85	171	256	55
9	171	341	512	89

(В колонках n и m указаны массы с максимальным числом взвешиваний, равным N_k.)

Подобно тому как при переводе числа из одной системы счисления в другую можно действовать начиная со старших разрядов, а можно — с младших, у нашей задачи есть другое решение, начинающееся «с младших разрядов». (Первый шаг — доказать, что массы, на которых достигается максимум, нечетны.)

А.Кулаков, А.Шаповалов, Н.Васильев

М1594. *Известно, что $f(xf(y)) = f(x)y$, где $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*
а) Докажите, что $f(xy) = f(x)f(y)$.
б) Придумайте три функции, удовлетворяющие условиям задачи.

а) Подставив в тождество

$$f(xf(y)) = f(x)y \qquad (1)$$

значение $x = 1$, получим (для любого y)

$$f(1)y = f(f(y)). \qquad (2)$$

Подставив в (1) $y = 1$, $x = z$, получим

$$f(z) = f(zf(1)). \qquad (3)$$

Применяя (3) к $z = xy$, затем используем (2) и (1):

$$f(xy) = f(xyf(1)) = f(xf(1)y) = f(xf(f(y))) = f(x)f(y).$$

б) Кроме тривиального примера $f_1(x) = 0$ (при всех x), естественно поискать нужные функции среди степенных: $y = x^\alpha$, поскольку на положительной полуоси $\mathbf{R}_+$ именно они удовлетворяют условию $f(xy) = f(x)f(y)$. (Можно показать, что среди непрерывных функций других таких, кроме нулевой, нет.)

Поскольку для $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$, равенство (1) принимает вид $x^\alpha y^{\alpha^2} = x^\alpha y$, можно попробовать взять $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$. В самом деле, функции $f_2(x) = x$ и $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f_3(0) = 0$ удовлетворяют условиям задачи. Можно ли иначе продолжить функцию с $\mathbf{R}_+$ на всю ось $\mathbf{R}$ с сохранением условий задачи? Нетрудно показать, что ответ отрицателен: построенные нами три функции — это единственные функции, удовлетворяющие условиям задачи и непрерывные на $\mathbf{R}_+$. В самом деле, если f удовлетворяет условию а) задачи, то, как нетрудно проверить, f либо четна, либо нечетна, причем и в первом из этих случаев $f(0) = 0$, если только $f(x) \not\equiv 1$. Далее, если (отличная от нуля) функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям задачи, то из очевидного равенства $f(1) = 1$ и из (2) следует, что $f(-1) = -1$. А отсюда легко следует, что $y = f(x)$ — нечетная функция.

Для любителей математической экзотики заметим, что существуют разрывные (всюду!) функции, удовлетворяющие условиям задачи (доказательство основано на существовании так называемого «базиса Хамеля» в $\mathbf{R}$ над $\mathbf{Q}$).

А.Герко, В.Сендеров

М1595. *В равнобедренном ($AB = BC$) треугольнике $\angle ABC = 80°$, $\angle OAC = 40°$, $\angle OCA = 30°$. Найдите $\angle BOC$.*

Ответ: $\angle BOC = 100°$.

Задача имеет много разных решений, в том числе — использующих тригонометрические функции. Мы приведем два чисто геометрических решения. Первое — по-видимому, самое короткое.

Пусть P — точка пересечения высоты равнобедренного треугольника, опущенной на основание, с отрезком OC

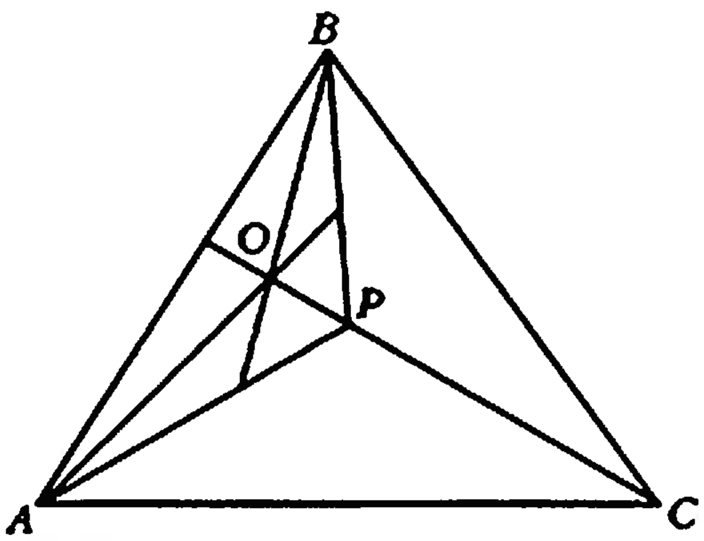


Рис.1

(рис.1). Проведем AP; тогда $\angle PAC = 30°$, $\angle PAB = 20°$, так что AO — биссектриса угла BAP. Докажем, что OP — биссектриса угла APB: $\angle OPA = 180° - \angle APC = 60°$, $\angle APB = 180° - (\angle ABP + \angle BAP) = 120°$. Итак, O — точка пересечения биссектрис треугольника ABP, так что и BO — биссектриса угла ABP, откуда $\angle BOP = 100°$.

Другое решение опирается на метод, описанный в статье В.Прасолова «Диагонали правильного 18-угольника» («Квант» № 5 за 1995 г., с.40). Впишем в окружность с центром B правильный 18-угольник, последовательные вершины которого мы обозначим номерами 1, ..., 18. Можно расположить треугольник ABC так, что A совпадет с вершиной 3, а C — с вершиной 17 (рис.2). Тогда отрезки (3, 13) и (17, 6) идут по отрезкам AO и CO в условии задачи, и остается (пользуясь свойством биссектрис треугольника и соображениями симметрии) проверить, что точка O лежит на пересечении (9, 1) с (11, 2). Мы получим, что центр B лежит на диаметре (2, 11) между точками 0 и 11. Следовательно, $\angle(B, 0, 17) = \angle(11, 0, 17) = 100°$.

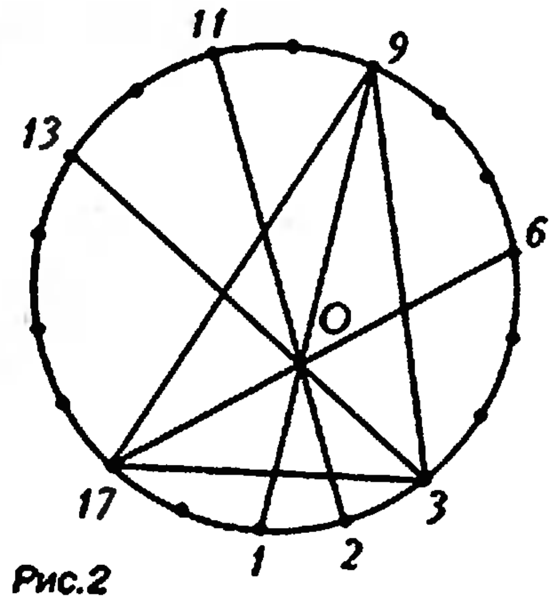


Рис.2

Г.Гальперин, В.Сендеров

М1597. *Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите неравенства*

а) $\dfrac{1}{1+2a} + \dfrac{1}{1+2b} + \dfrac{1}{1+2c} \geq 1;$

б) $\dfrac{1}{1+a+b} + \dfrac{1}{1+b+c} + \dfrac{1}{1+c+a} \leq 1.$

а) Избавляясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем эквивалентное неравенство: $1 + a + b + c \geq 4abc$, или

$$a + b + c \geq 3.$$

Таким образом, мы пришли к неравенству, прямо следующему из «неравенства между средними»:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3. \qquad (1)$$

б) Обозначим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Поскольку $x^2 - xy + y^2 \geq xy$, имеем $x^3 + y^3 \geq (x+y)xy$, откуда

$$\frac{1}{1+a+b} = \frac{z}{z + z\left(x^3 + y^3\right)} \leq \frac{z}{z + z(x+y)xy} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Складывая это неравенство с двумя аналогичными, получим неравенство задачи.

К заменам $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ можно прийти из следующих естественных соображений: неравенство (после замены 1 на xyz) принимает вид

$$\frac{xyz}{xyz + x^3 + y^3} + \ldots \leq 1 \qquad (2)$$

и оказывается однородным. (Заметим, что, как видно из решения а), замены $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$ и попытка воспользоваться неравенствами

$$x^2 + y^2 \geq 2xy,\ y^2 + z^2 \geq 2yz,\ z^2 + x^2 \geq 2zx$$

не привели бы к цели.)

Доказывая (2), можно действовать в лоб: именно, преобразовать его к виду

$$2\left(x^5y^2z^2 + x^2y^5z^2 + x^2y^2z^5\right) \leq \left(x^3 + y^3\right)z^6 + \left(y^3 + z^3\right)x^6 + \left(z^3 + x^3\right)y^6 \qquad (3)$$

(к такому виду и привел неравенство на Московской олимпиаде1997 года Александр Чернятьев из СУНЦ МГУ).

Справедливость при всех неотрицательных значениях переменных неравенства (3) между симметрическими многочленами следует из теоремы Мюрхеда. (См., например, «Квант» №7 за 1985 г., с. 33–36. Статья так и называется: «Как получаются симметричные неравенства».)

Еще одно доказательство неравенства получили на Московской олимпиаде ученики СУНЦ МГУ Илья Ермолаев и Андрей Мищенко.

Приведя левую часть к общему знаменателю и умножив обе части неравенства на этот знаменатель, а затем приводя подобные слагаемые и пользуясь тем, что $2abc = 2$, получим

$$2(a+b+c) \le b^2(a+c) + c^2(a+b) + a^2(c+b).$$

Прибавим к правой части выражение $3abc - 3 = 0$, тогда правая часть примет вид

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3;$$

преобразуя неравенство, получим

$$(a+b+c)(ab+bc+ca-2) \ge 3.$$

Остается доказать два неравенства (оба можно вывести из неравенства (1) между средними для трех чисел):

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3;$$

$$ab+bc+ca-2 \ge 1.$$

Г.Гальперин, В.Сендеров

М1599. *Из последовательности 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ... первых цифр степеней 2 выбираются несколько цифр подряд и записываются в обратном порядке. Докажите, что эти цифры встретятся, начиная с некоторого места, подряд в последовательности первых цифр степеней 5.*

Достаточно доказать, что любой начальный кусок последовательности первых цифр степеней пятерки встречается (перевернутым) в последовательности первых цифр степеней двойки.

Рассмотрим числа: $1/2$, $1/4$, ..., $1/2^n$. Последовательность первых ненулевых цифр их десятичных записей 5, 2, 1, ... есть в точности последовательность первых цифр десятичных записей чисел 5, 25, ..., 5^n. Таким образом, если добавить отрицательные степени, то утверждение задачи будет выполнено.

Для решения нашей задачи следует «сдвинуть» отрицательные степени. Для этого достаточно показать существование такой степени двойки $x = 2^n$, десятичная запись которой имеет вид 100...0* , где звездочка обозначает оставшуюся часть десятичной записи. В этом случае $2^{n-1} = 2^n/2 = 500...0*$, $2^{n-2} = 250...0*$, $2^{n-3} = 1250...0*$, ...

Заметим, что существует бесконечно много степеней двойки, у которых первые k цифр совпадают, причем k можно выбрать сколь угодно большим. Разделим одну такую степень на другую (меньшую). Если мы получим степень двойки, которая начинается с 1 и большого числа нулей, то задача решена. В противном случае получится степень двойки, которая начинается с большого числа девяток. Удвоим k и повторим операцию. Если снова получится степень, которая начинается с девяток, то разделим ее на полученную в предыдущем делении. Полученная степень двойки, как нетрудно видеть, начинается с 1 и большого числа нулей, что и требовалось.

Существование степени 2 вида 100...0*, и вообще начинающейся с любой комбинации цифр, можно получить и из более общих соображений: число $\lambda = \lg 2$ иррационально (поскольку невозможно равенство $2^m = 5^n$ с целыми m и n), а дробная часть $N\lambda - [N\lambda]$ чисел $N\lambda$, $N \in Z$, при иррациональном λ принимает значения, сколь угодно близкие к любой точке отрезка $[0; 1]$.

А.Канель

Ф1608. *Мэр одного городка начал получать жалобы на большую автомобильную пробку перед светофором на главной улице. Скорость машин при движении составляла 6 м/с, а средняя скорость продвижения по пробке — всего 1,5 м/с. При этом время свечения светофора зеленым светом было равно времени свечения красным (время свечения желтым пренебрежимо мало). Мэр распорядился увеличить время свечения зеленым светом в 2 раза, оставив прежним время свечения красным. Чему станет равна средняя скорость продвижения машин по пробке? Считать, что скорость машин при движении не изменилась. Учесть, что при включении зеленого света автомобили начинают двигаться не одновременно.*

После включения светофора машины действительно начинают двигаться не одновременно: сначала начинают двигаться машины, стоящие непосредственно перед светофором, затем следующие за ними, и т.д. Таким образом, после включения зеленого света вдоль пробки начинает распространяться «волна», причем реально скорость ее распространения сравнима со скоростью движения машин.

Пусть за время $T_з$, пока горит зеленый свет, мимо светофора проезжает часть пробки длиной L. Это время складывается из двух промежутков: времени, необходимого для того, чтобы волна прошла расстояние L, и времени, необходимого для того, чтобы машина успела это расстояние проехать. Если v — скорость машины, u — скорость распространения волны, то

$$T_з = \frac{L}{v} + \frac{L}{u}.$$

Обозначим время свечения светофора красным светом через $T_к$, тогда среднюю скорость продвижения по пробке можно вычислить по формуле

$$V_{ср} = \frac{L}{T_к + L/v}.$$

Из написанных формул для случая, когда $T_з = T_к$, получаем

$$u = \frac{vV_{ср}}{v - 2V_{ср}} = 3 \text{ м/с}.$$

При увеличении времени $T_з$ в два раза средняя скорость продвижения машин по пробке будет равна

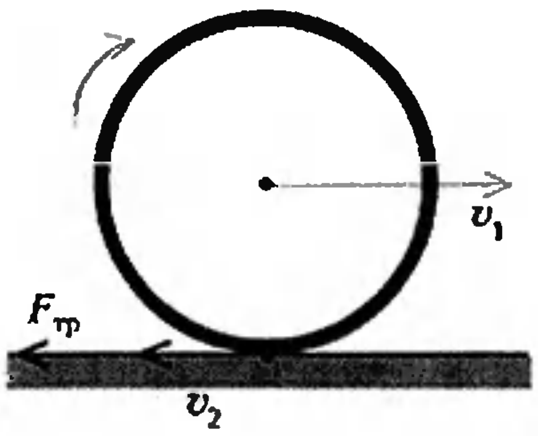
$$V_{ср1} = \frac{v}{1 + \frac{T_к}{2T_з}\frac{u+v}{u}} = 2{,}4 \text{ м/с}.$$

Р.Сеннов

Ф1609. *На горизонтальной шероховатой поверхности находятся две одинаковые длинные тонкостенные трубы, оси которых параллельны. Одна труба покоится, а вторая катится по направлению к ней без проскальзывания со скоростью v. Происходит абсо-*

лютно упругий удар (трением труб друг о друга при ударе можно пренебречь). Коэффициент трения скольжения между трубами и поверхностью μ. *На каком максимальном расстоянии друг от друга могут оказаться трубы после удара?*

Поскольку трением между трубами во время удара можно пренебречь, удар абсолютно упругий и трубы одинаковы, то после удара катившаяся труба потеряет поступательную составляющую движения, но сохранит вращение, а покоившаяся труба приобретет поступательное движение, но не будет вращаться. Таким образом, обе трубы начнут проскальзывать относительно поверхности, причем одна из них будет ускоряться, а вторая замедляться. Ускорения обеих труб направлены в разные стороны, но модули их одинаковы и равны $a = \mu g$. Рассмотрим движение первой трубы, которая приобрела поступательное движение и в начальный момент времени не вращалась (см. рисунок).



Скорость ее оси уменьшается по закону

$$v_1 = v - at = v - \mu g t.$$

Линейная скорость точки касания трубы с поверхностью имеет относительно оси трубы скорость

$$v_2 = at = \mu g t,$$

которая увеличивается со временем. Проскальзывание трубы прекратится в тот момент t_0, когда скорости v_1 и v_2 сравняются:

$$v - \mu g t_0 = \mu g t_0.$$

Отсюда для времени t_0, через которое прекратится проскальзывание, получаем

$$t_0 = \frac{v}{2\mu g}.$$

Для второй трубы все будет происходить аналогично, с той лишь разницей, что скорость оси трубы будет нарастать по закону $v_2 = at = \mu g t$, а линейная скорость точки касания трубы с поверхностью (относительно оси) будет уменьшаться по закону $v_1 = v - at = v - \mu g t$. Таким образом, проскальзывание труб прекратится через одно и то же время t_0, и скорости их движения станут одинаковыми и равными $v/2$. После того как скорости труб уравняются, расстояние между ними перестанет изменяться. Значит, для того чтобы найти максимальное расстояние между трубами, нужно вычислить разность их координат через время t_0. Если начало координат поместить в место, где происходит соударение, то для координаты первой трубы имеем

$$x_1 = vt_0 - \frac{at_0^2}{2} = \frac{3v^2}{8\mu g},$$

а для координаты второй трубы —

$$x_2 = \frac{at_0^2}{2} = \frac{v^2}{8\mu g}.$$

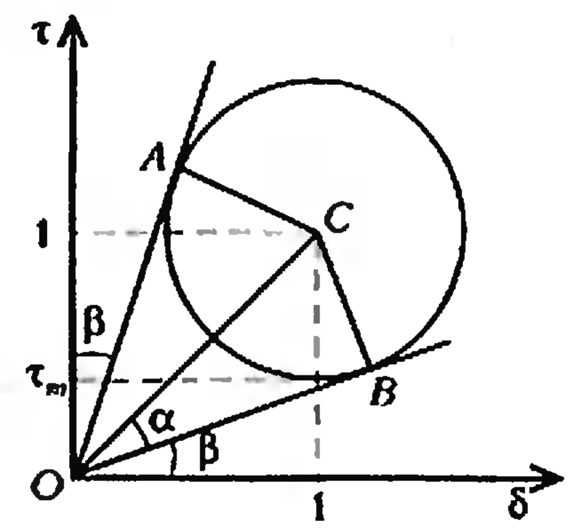
Значит, искомое расстояние между центрами труб равно

$$s = x_1 - x_2 = \frac{v^2}{4\mu g}.$$

С.Варламов

Ф1610. *Зависимость приведенной температуры* T/T_0 *гелия от приведенного давления* p/p_0 *имеет вид окружности, центр которой находится в точке (1; 1), причем минимальная приведенная температура гелия в этом процессе равна* τ_m. *Найдите отношение минимальной и максимальной концентраций атомов гелия при таком процессе.*

Согласно уравнению $p = nkT$, концентрация n атомов гелия определяется его температурой T и давлением p (k — постоянная Больцмана). Отсюда следует, что на $T-p$-диаграмме из двух прямых, проходящих через начало координат, большей концентрации атомов соответствует прямая, идущая под меньшим углом к оси p. Поэтому в показанной на рисунке диаграмме заданного процесса концентрация атомов максимальна в точке B и минимальна в точке A (диаграмма построена в приведенных координатах $\tau = T/T_0$ и $\delta = p/p_0$).



Из чертежа следует, что

$$n_{max} = \frac{p_B}{kT_B} = \frac{p_0 \operatorname{ctg}\beta}{kT_0},$$

где β — угол наклона касательной BO к оси δ на приведенной диаграмме. Так как $\Delta ACO = \Delta BCO$, угол между касательной AO и осью τ на приведенной диаграмме также равен β и

$$n_{min} = \frac{p_A}{kT_A} = \frac{p_0 \operatorname{tg}\beta}{kT_0}.$$

Таким образом, искомое отношение концентраций равно

$$\frac{n_{min}}{n_{max}} = \operatorname{tg}^2\beta.$$

Учитывая, что минимальная приведенная температура $\tau_m = T_m/T_0$ гелия и радиус r окружности, соответствующей на диаграмме заданному процессу, связаны соотношением $r = 1 - \tau_m$, получаем, что $\sin\alpha = r/\sqrt{2}$, так как ΔCBO прямоугольный и его гипотенуза $OC = \sqrt{2}$. Из диаграммы видно, что $\alpha + \beta = \pi/4$. Учитывая это, получим

$$\frac{n_{min}}{n_{max}} = \operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}^2(\pi/4 - \alpha) =$$

$$= \left(\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1-r\sqrt{2-r^2}}{1+r\sqrt{2-r^2}} =$$

$$= \frac{1-(1-\tau_m)\sqrt{2-(1-\tau_m)^2}}{1+(1-\tau_m)\sqrt{2-(1-\tau_m)^2}} = \frac{1-(1-\tau_m)\sqrt{1+2\tau_m-\tau_m^2}}{1+(1-\tau_m)\sqrt{1+2\tau_m-\tau_m^2}}.$$

В.Погожев

Ф1611. *Тонкое проволочное кольцо радиусом R, заряженное зарядом Q, и металлическая сфера меньшего радиуса r размещены так, что их центры совпадают. Сфера заземлена очень тонким длинным проводником. Найдите потенциал точки, находящейся на оси кольца на расстоянии x от его плоскости.*

Поскольку заземляющий сферу проводник является тонким и длинным, можно пренебречь электрическим полем этого проводника и считать, что кольцо со сферой столь удалены от других тел, что влиянием последних можно пренебречь. В силу сказанного и заданного расположения сферы относительно кольца можно считать, что заряд Q равномерно распределен по кольцу.

Разобьем кольцо на малые элементы, каждый из которых можно считать точечным зарядом величиной ΔQ. Отметим, что поверхность нулевого потенциала поля, создаваемого двумя не равными по величине и противоположными по знаку зарядами, имеет вид сферы, окружающей меньший по модулю заряд. (См., например, статью А.Черноуцана «Метод электростатических изображений» в «Кванте» №1 за 1996 год — *Прим. ред.*) Следовательно, поле, создаваемое точечным зарядом ΔQ, находящимся на расстоянии R от центра заземленной сферы, и зарядами, имеющимися на заземленной сфере радиусом $r < R$, вне сферы должно совпадать с полем точечных зарядов ΔQ и $-\Delta q$ при определенной величине и расположении последнего. Из соображений симметрии очевидно, что заряд $-\Delta q$ должен находиться на прямой, соединяющей центр заданной сферы и заряд ΔQ, причем между ними. Если расстояние от заряда $-\Delta q$ до центра сферы равно ρ, то, поскольку все точки сферы имеют нулевой потенциал, должны выполняться равенства

$$\frac{\Delta Q}{R-r} = \frac{\Delta q}{r-\rho}, \quad \frac{\Delta Q}{R+r} = \frac{\Delta q}{r+\rho}.$$

Отсюда получаем

$$\rho = \frac{r^2}{R}, \quad \Delta q = \frac{\Delta Q r}{R}.$$

Приведенные рассуждения справедливы для любого элемента кольца. Из сказанного следует, что поле вне сферы в рассматриваемой задаче эквивалентно полю двух коаксиальных колец — радиусом R с зарядом Q и радиусом ρ с зарядом $-q = Qr/R$. Поскольку потенциал поля кольца радиусом R с равномерно распределенным по нему общим зарядом Q на оси кольца на расстоянии x от его плоскости равен

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, то искомое значение потенциала составляет

$$\varphi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} 0, & |x| < r; \\ \dfrac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \dfrac{r}{\sqrt{r^4+x^2R^2}}, & |x| > r. \end{cases}$$

В.Погожев

Ф1612. *Рентгеновский аппарат состоит из точечных источника И и приемника П, жестко закрепленных на станине. Между источником и приемником перемещают цилиндрический толстостенный баллон (рис.1). При этом интенсивность рентгеновского излучения, регистрируемая приемником, зависит от координаты x так, как показано на графике. Есть ли внутри баллона содержимое, поглощающее рентгеновские лучи?*

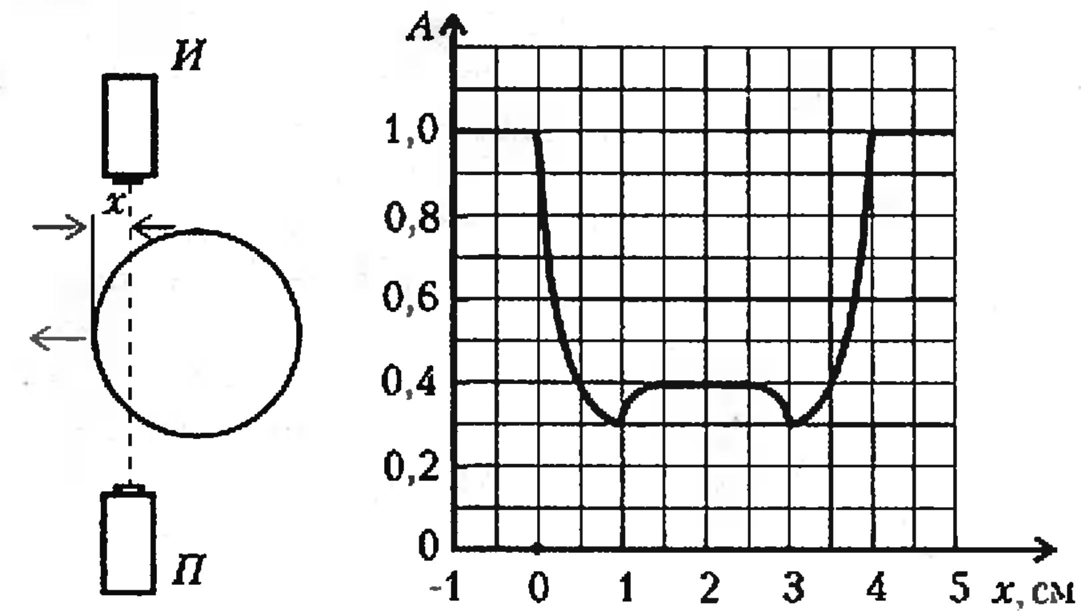


Рис. 1

Из графика на рисунке 1 ясно, что стенки баллона имеют толщину 1 см, а внешний диаметр баллона $d = 4$ см. Для того чтобы получить ответ, достаточно сравнить интенсивность излучения в середине баллона при $x = 2$ см (в этом месте луч проходит через содержимое баллона и через две его стенки, суммарная толщина которых 2 см) и в том месте, где при проходе сквозь стенку толщина металла на пути луча также равна 2 см. Если они одинаковы, то баллон пуст. Из геометрических соображений (рис.2) получаем $r^2 = h^2 + (r-x)^2$, где $r = d/2 = 2$ см, $h = 1$ см. Отсюда

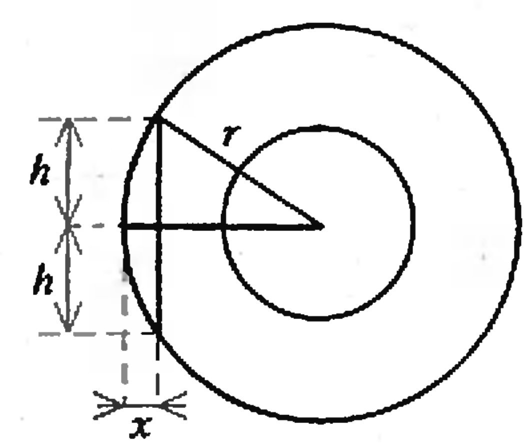


Рис. 2

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}28 \text{ см}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}72 \text{ см}.$$

Из графика видно, что при $x = 2$ см интенсивность излучения составляет 0,4 ед., а при $x = x_1$ и $x = x_2$ интенсивность равна примерно 0,5 ед., что несколько больше. Значит, в баллоне есть содержимое.

А.Андрианов

Задачи

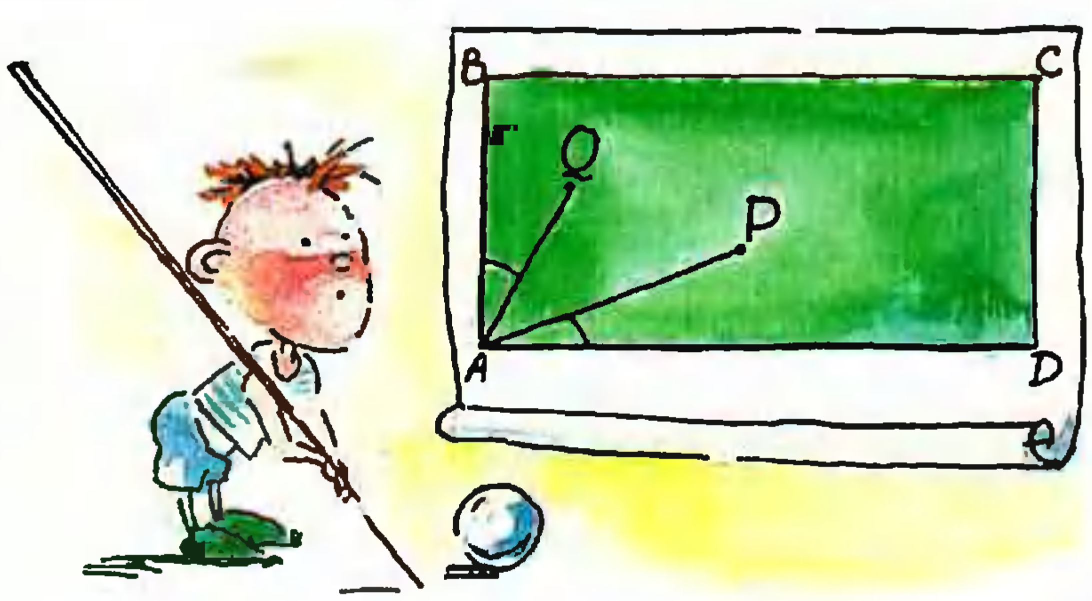
1. Три бизнесмена решили оказать материальную помощь научно-популярному журналу «Кварк». Бизнесмен К.Горовой дал столько же долларов, сколько и центов. Бизнесмен К.Моровой выделил на 3 доллара

больше, но в 8 раз меньше центов. Бизнесмен К.Хоровой расщедрился на сумму в 7 раз меньшую, чем остальные двое вместе взятые.

Каков общий размер помощи, оказанной журналу?

И.Акулич

2. На бильярдном столе $ABCD$ расположены два шара P и Q так, что углы PAB и QAD равны. Если ударить шар P так, чтобы он, оттолкнувшись от борта AB, столкнулся с шаром Q, то он пройдет путь PMQ. Если же ударить шар P так, чтобы он, оттолкнувшись



от борта AD, также столкнулся с шаром Q, то он пройдет путь PNQ. Докажите, что длины этих путей равны. (Шары предполагаем точечными.)

В.Произволов

3. В некоторой системе счисления цифры имеют форму различных геометрических фигур. На рисунке приведены некоторые числа, записанные в этой системе счисления. Какому числу соответствует следующая

	○	△				4
	△	○				6
□	○	□			1	9
☆	□	☆		1	9	0
▽	☆	▽	1	9	0	0

запись:

▽☆▽□☆△○○?

А.Жуков

4. К проволочному треугольнику со стороной 2 метра прицепили с помощью колечек стержень длиной 1 метр. Мальчик решил конец M стержня обвести вокруг всего треугольника. За какое наименьшее время ему

удастся это сделать, если он может передвигать конец M стержня со скоростью, не большей 1 метра в минуту?

С.Дворянинов

5. В волейбольном турнире каждая команда дважды встречалась со всеми остальными командами. Оказалось, что 80% команд имеют хотя бы по одной победе. Сколько встреч было проведено в турнире?

С.Манвелов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. В нем могут принять участие как отдельные школьники, так и математические кружки. Конкурс состоит из 20 задач — по 5 задач в каждом номере журнала, начиная с четвертого, и заканчивается в первом номере будущего года. Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 марта 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»).

Победители будут награждены призами журнала, а лучшие математические кружки будут приглашены в летний математический лагерь.

11. Книга имеет 120 страниц, одна из которых отведена под титул, одна — под аннотацию и еще одна — под оглавление. На остальных страницах напечатаны сказки, причем каждая сказка начинается с новой страницы. Сумма номеров страниц, на которых начинаются сказки, в пять раз меньше суммы номеров страниц, на которых они заканчиваются. Сколько сказок в книге?

И.Акулич

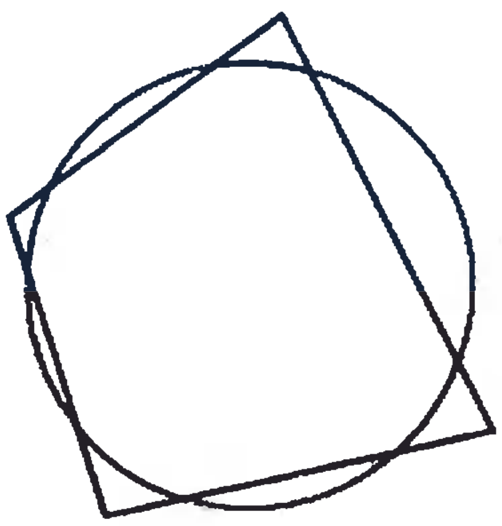


Рис.1

12. Окружность и четырехугольник расположены так, как это показано на рисунке 1. Известно, что суммы длин противоположных дуг окружности, лежащих внутри четырехугольника, равны. Докажите, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

В.Произволов

13. Несложно придумать две пары одинаковых фигурок, обладающих следующим свойством: какие бы две из них ни выбрать, из них можно составить такую же фигуру, что и из двух оставшихся. Например, этим свойством обладают фигурки, изображенные на рисунке 2. Попробуйте найти четыре попарно различные фигуры, обладающие тем же свойством.

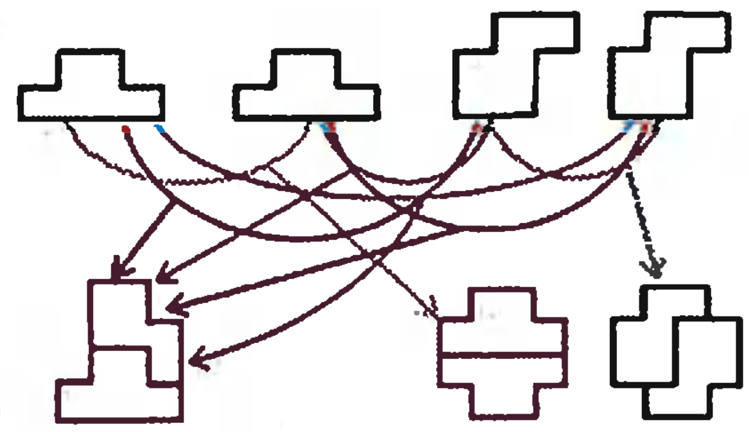


Рис.2

С.Волченков

14. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, удовлетворяющие уравнению

$$4(a+b+c)=ab+bc+ca.$$

Л.Курляндчик

15. В последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равняется 1799, а число a_2 равняется 1828. Каждое из следующих чисел находится по закону $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{a_{n-1}}$. Чему равняется a_{1997}?

А.Савин

Сквозь розовые очки

С.ТИХОМИРОВА

Глаз человека подобен совершенной оптической системе, основным элементом которой является собирающая линза. Ее «образуют» роговица, хрусталик и стекловидное тело.

Если изображение удаленных предметов фокусируется на сетчатке, глаз считается нормальным, если перед сетчаткой — близоруким, за ней — дальнозорким. Эти недостатки глаза легко исправить. Близорукость корректируется рассеивающими линзами, а дальнозоркость — собирающими.

Самым распространенным прибором для коррекции зрения являются очки. В XIX веке и в начале XX были популярны также пенсне, монокли, лорнеты. Так, у А.С.Пушкина читаем:

... Онегин входит,
Идет меж кресел по ногам,
Двойной лорнет скосясь наводит
На ложи незнакомых дам.

Известный литературный персонаж из книги И.Ильфа и Е.Петрова «Двенадцать стульев» страдал близорукостью:

«Ипполит Матвеевич, как обычно, проснулся в половине восьмого и сразу же просунул нос в старомодное пенсне с золотой дужкой. Очков он не носил. Однажды, решив, что носить пенсне негигиенично, Ипполит Матвеевич направился к оптику и купил очки без оправы, с позолоченными оглоблями. Очки с первого раза ему понравились, но жена <...> нашла, что в очках он — вылитый Милюков, и он отдал очки дворнику. Дворник, хотя и не был близорук, к очкам привык и носил их с удовольствием».

Очки стали столь неотъемлемой частью жизни человека, что даже вошли в поговорки: «Очки грамоте не научат», «Смотреть сквозь розовые очки» и т.п.

Предлагаем вашему вниманию несколько отрывков из литературных произведений, в которых главным действующим лицом являются... очки. Прочитайте внимательно тексты отрывков и постарайтесь ответить на поставленные вопросы. При этом не судите слишком строго авторов, допустивших те или иные физические неточности, и посмотрите на них «сквозь розовые очки».

1. Бабушка перед чтением вечерней сказки надела очки.

— Бабушка, ты говорила, что очки увеличивают буквы, да?

— Верно.

— А все остальное в них тоже вырастает?

— Конечно.

— Тогда надень их завтра утром, когда будешь отрезать мне пирог.

Получит ли девочка больший кусок пирога, если бабушка наденет очки? Какой недостаток зрения был у бабушки?

2. Однажды сосед увидел, что Молла положил перед своим ослом вместо травы щепки, и спросил:

— Ай, Молла, разве животное может есть щепки?

— Я знаю, что не может, — ответил Молла, — но что мне делать? Травы нет, а бедный осел голоден.

— Ты что же, хочешь обмануть его? — спросил сосед. — Он не такой дурак, чтобы вместо травы есть щепки.

Иллюстрации П. Чернуского

— Я не позволю ему поступать так, как он хочет, — возразил Молла. — Сейчас он будет есть.

И Молла надел ослу очки с зелеными стеклами.

Какого цвета кажутся предметы белого цвета через зеленые очки?

3. Правитель города Гудвин на вопрос Элли, где он взял столько зеленого мрамора, отвечает: «В моем городе не больше зеленого, чем во всяком другом. Тут все дело в зеленых очках, которые никогда не снимают мои подданные».

Действительно ли любые предметы видятся зелеными сквозь зеленые очки? Какого цвета кажутся, например, красные цветы через зеленое стекло?

4. Червяков достал пухлую записную книжку, близоруко поднес ее к глазам...

Червяков надел очки и посмотрел на Данилова. За выпуклыми стеклами глаза казались огромными, особенно зрачки...

Не вызывает ли у Вас сомнение содержание этого отрывка?

5. — Доктор, а вы уверены в том, что если я буду есть много моркови, то у меня улучшится зрение?

— Конечно. Вы видели когда-нибудь зайца в очках?

В чем отличие зрения зайца от зрения человека? Почему зайца называют косым?

6. В банк врывается грабитель и рычит:

— Всем поднять руки вверх и не двигаться!

Через минуту он жалобно спрашивает:

— Ну что, все подняли руки вверх? Я без очков не вижу.

Каким недостатком зрения — близорукостью или дальнозоркостью — страдал грабитель?

7. Одна светилась лампа в комнате
и две — в двойном стекле.
И, чтобы видеть сны отчетливей,
я засыпал в очках.

Почему в окне было два изображения лампы?

Формула Лейбница

А.ЕГОРОВ

В ПРОШЛОМ номере нашего журнала была опубликована статья А.Котовой «Готфрид Вильгельм Лейбниц». В этой статье упоминалась одна замечательная формула для числа π, доказанная Лейбницем в 1666 году и получившая его имя. Вот она:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (1)$$

Здесь мы докажем это и некоторые другие замечательные соотношения.

Геометрическая прогрессия

Рассмотрим сумму

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

По известной формуле для суммы первых n членов геометрической прогрессии получаем

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}. \qquad (2)$$

Будем считать теперь, что $|x| < 1$.

При больших n и фиксированном x выражение $\frac{x^n}{1-x}$ мало по модулю и с ростом n стремится к нулю, так что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1-x} = 0$$

при всяком $x \in (-1; 1)$.

Мы можем также переписать равенство для $S_n(x)$ несколько иначе:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}. \qquad (3)$$

Полученное тождество окажется очень полезным в дальнейшем.

Разглядывая равенство (3), мы приходим к выводу, что точность приближенного равенства

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + \ldots + x^{n-1} = S_n(x)$$

тем выше, чем больше n. Это дает нам основание записать:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

при $|x| < 1$,

понимая под бесконечной суммой в правой части предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Мы представили функцию $\frac{1}{1-x}$ в виде *суммы бесконечного ряда*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

или, как часто говорят, *разложили эту функцию в ряд* по степеням x (или в степенной ряд).

Для очень широкого класса функций (в частности, для элементарных функций, изучаемых в школе) такие разложения возможны, т.е. возможна запись $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ Некоторые примеры таких разложений мы увидим дальше.

Разложение в ряд функции ln(1 + x)

Теперь от читателя потребуется знакомство с натуральными логарифмами и интегралами (впрочем, в пределах школьного курса математики).

Запишем тождество (3), подставив в него $x = -t$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}, \qquad (3')$$

и проинтегрируем это тождество по t от 0 до x ($|x| < 1$):

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \qquad (4)$$

где $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$. Иначе говоря (вспомним формулы производной логарифма и Ньютона-Лейбница $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\big|_0^x = \ln(1+x)$),

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Изучим поведение $R_n(x)$ при $n \to \infty$. Поскольку при $0 < t \le 1$

$$0 < \frac{t^n}{1+t} \le t^n,$$

то и

$$0 \le \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \le \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому при $0 < x \le 1$

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1},$$

т.е. при всяком $0 < x \le 1$

$$R_n(x) \to 0,$$

что дает нам право записать

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}. \qquad (5)$$

Упражнение 1. Докажите, что и при $-1 < x < 0$ формула (5) справедлива.

Итак, при всех $-1 < x \le 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Мы получили разложение в ряд натурального логарифма. Подставляя $x = 1$ в равенство (5), получаем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (6)$$

Разложение арктангенса

Подставляя $-t^2$ в формулу (3) вместо x, получаем тождество

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}. \qquad (7)$$

Вспомним теперь формулу для производной арктангенса:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Эта формула не доказывается в курсе средней школы, однако вывод ее с помощью формулы производной тангенса или (для знатоков) формулы производной обратной функции не представляет особого труда.

Упражнение 2. Докажите, что $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Проинтегрируем равенство (7) от 0 до x:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x 1 dt - \int_0^x t^2 dt + \ldots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2} dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt. \qquad (7')$$

Поскольку, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\big|_0^x = \operatorname{arctg} x,$$

получаем тождество

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Оценим $R_n(x)$ так же, как мы поступали, раскладывая в ряд логарифм ($-1 \le x \le 1$):

$$|R_n(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

Если $|x| \le 1$, то

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{2n+1},$$

т.е. $R_n(x) \to 0$ при всяком x из отрезка $[-1; 1]$. Мы получили разложение арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1},\ x \in [-1; 1]. \quad (8)$$

Формула Лейбница

Мы уже знаем, что разложение в ряд арктангенса справедливо и при $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в (8), получаем

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Упражнение 3. Подставьте в формулу (8) какие-нибудь другие числа (вместо x). Какие формулы для числа π вы при этом получите?

Поиски формулы для числа π давали математикам надежду на то, что им удастся решить проблему квадратуры круга. Однако, несмотря на красоту получавшихся формул, никаких сдвигов в проблеме квадратуры не было вплоть до конца XIX века, когда немецкому математику Линдеману удалось доказать, что число π трансцендентно, т.е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами, и, тем самым, построить квадрат, равновеликий данному кругу, нельзя.

И еще одно замечание. Разложение в ряд арктангенса и до Лейбница было известно Грегори — ученику Ньютона, Однако Грегори этот свой результат нигде не публиковал, так что Лейбницу, по-видимому, пришлось самому «открывать» разложение арктангенса.

НАША ОБЛОЖКА

ХОЛОДНОЕ КИПЕНИЕ

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Описанный эксперимент наглядно иллюстрирует физическую сущность процесса кипения: кипение начинается тогда, когда давление насыщенного пара при температуре жидкости сравнивается с давлением жидкости. В этом случае образующиеся внутри жидкости пузырьки, наполненные паром, перестают схлопываться, растут, всплывают к поверхности и там лопаются. Для поддержания заметного кипения необходим приток энергии, компенсирующий потери на интенсивное парообразование.

Возле открытой поверхности воды в нашей пробирке кипение начинается примерно при 100 °С, когда давление насыщенных паров воды равно давлению окружающего воздуха, т.е. примерно 100 кПа. Интенсивный поток пара вытесняет из пробирки почти весь воздух, и после закрывания пробирки в ее свободной части остается практически только насыщенный пар. При обливании пробирки холодной водой температура и давление пара падают, соответственно уменьшается и давление на воду, а температура ее измениться не успевает. Значит, давление воды становится ниже давления насыщенного пара при температуре воды, и ... начинается кипение. Энергия, необходимая для поддержания кипения, берется у остывающей воды. Поэтому через некоторое время температура воды понизится (а давление в пробирке повысится) и кипение прекратится.

При последовательных поливаниях сначала холодной, а затем и ледяной водой температура воды и насыщенного пара постепенно уменьшаются, и в конце опыта давление в пробирке оказывается совсем маленьким (так, при 0 °С давление насыщенного пара почти в 17 раз меньше атмосферного). Чтобы проверить это, достаточно открыть пробку — вы услышите хлопок воздуха, входящего в пробирку. Есть еще один, очень красивый, способ убедиться в том, что над водой находится «почти пустота». Попробуйте установить пробирку вертикально и резко встряхнуть ее в вертикальном направлении — вы услышите необычный звук, как будто в пробирке находится не вода, а нечто жесткое. Причина как раз и состоит в отсутствии над водой воздуха, препятствующего ее свободному резкому движению.

С.Кротов, А.Черноуцан

Гравитационная машина

А.САМБЕЛАШВИЛИ

В 1994 ГОДУ на Международном турнире юных физиков в Голландии его участникам была предложена такая задача:

«Имеется массивная стальная плитка, расположенная горизонтально и колеблющаяся вдоль вертикали по гармоническому закону с амплитудой $A \approx 3$ мм и частотой $\omega \approx 500$ с$^{-1}$. На плитку кладут маленький (радиусом ≈ 1 мм) стальной шарик, который вследствие соударений с плиткой начинает подпрыгивать вверх-вниз. Определите, как меняется средняя (за некоторый промежуток времени) максимальная высота подскока шарика со временем, и объясните полученные результаты».

Задача эта привлекательна своей кажущейся простотой и одновременно связью с фундаментальными физическими представлениями. О них будет сказано ниже, а пока попробуем ответить на вопрос задачи, т.е. определить (хотя бы качественно) зависимость средней максимальной высоты подскока шарика от времени. Быстрее всего это можно сделать, проведя эксперимент. Собрать установку, описанную в задаче, — дело несложное. Существует множество различных способов заставить плитку колебаться, один из них — присоединить ее с помощью кривошипного механизма к обыкновенному электромотору. Чтобы шарик подпрыгивал вдоль вертикали и не отскакивал в стороны, над плиткой можно поставить трубку с прозрачными стенками. Если же вы умеете программировать, то вам не составит большого труда смоделировать задачу на компьютере.

Тот, кто не пожалеет времени на создание модели, вознаградит себя наблюдением удивительного, на первый взгляд, явления: средняя высота подскока шарика будет постепенно увеличиваться с течением времени до тех пор, пока не достигнет некоторого предельного значения. Этот эффект получил название «ускорения», а сама установка — «гравитационной машины», поскольку гравитационное притяжение служит механизмом, возвращающим шарик назад к плитке.

Попробуем объяснить увиденное. Прежде всего запишем законы движения шарика и плитки, направив ось X вертикально вверх, а за начало координат выбрав положение равновесия, относительно которого колеблется плитка (см.рисунок):

$$x_ш(t) = x_ш(t_n) + v_n(t - t_n) - \frac{g(t-t_n)^2}{2},$$

$$x_п(t) = A\sin\omega t,$$

где $x_ш(t)$ — координата шарика в момент времени t, $x_п(t)$ — координата плитки, t_n — момент n-го по счету столкновения шарика с плиткой, v_n — абсолютная величина скорости шарика непосредственно после n-го столкновения. Первое уравнение описывает движение шарика в промежутках между соударениями. При соударениях его скорость меняется скачком. Пусть t_{n+1} — момент времени $(n+1)$-го столкновения. В этот момент скорость плитки $v_п = x_п'(t_{n+1}) = A\omega\cos(\omega t_{n+1})$. Примем в качестве допущения (оно оправдывается экспериментом), что максимальная высота подскоков шарика велика по сравнению с амплитудой колебаний плитки. Это позволит нам считать скорости шарика (здесь и далее под скоростью подразумевается ее абсолютная величина) сразу после n-го и непосредственно перед $(n+1)$-м столкновениями приблизительно равными. Полагая соударения абсолютно упругими, нетрудно получить выражение для скорости шарика непосредственно после $(n+1)$-го соударения:

$$v_{n+1} = v_n + 2v_п = v_n + 2A\omega\cos\varphi_{n+1},$$

где $\varphi_{n+1} = \omega t_{n+1}$ — фаза колебаний плитки в момент $(n+1)$-го соударения.

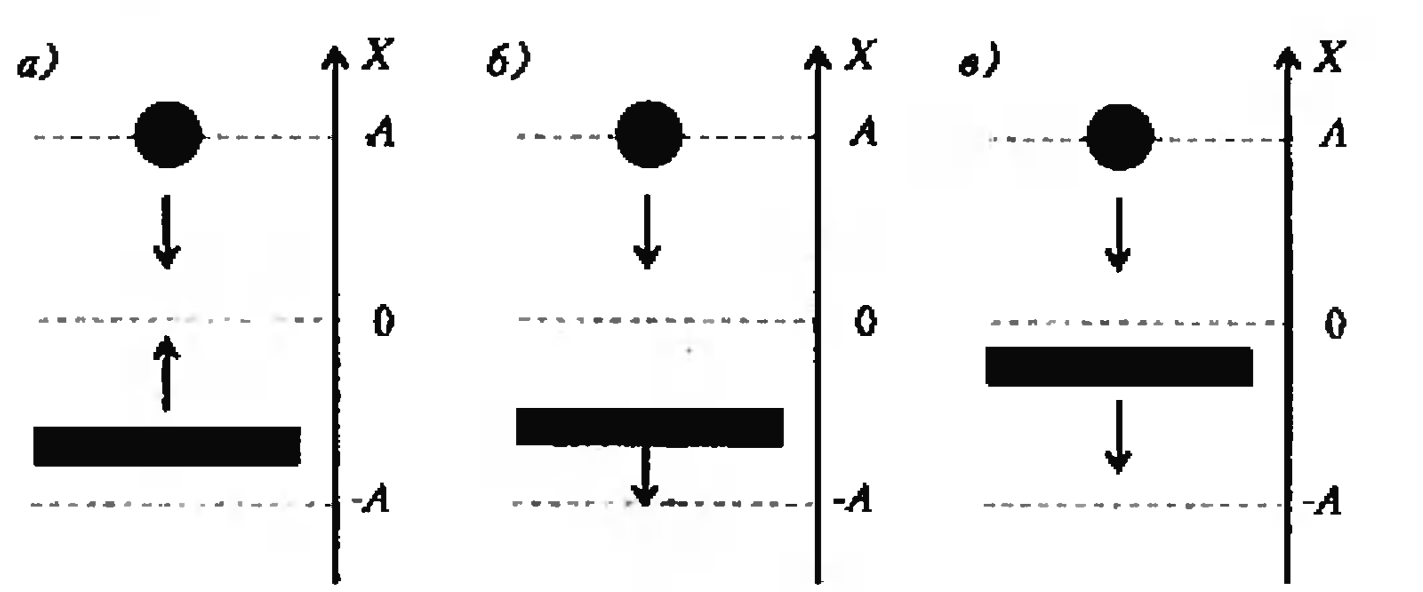
Последнее соотношение показывает, что при $\varphi_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ $\cos\varphi_{n+1} > 0$, т.е. плитка в момент соударения движется вверх, навстречу шарику. В результате столкновения скорость шарика возрастает, следовательно, возрастает его энергия $mv_n^2/2$ и максимальная высота подскока $h_n = v_n^2/(2g)$. При $\varphi_{n+1} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\cos\varphi_{n+1} < 0$ — плитка в момент соударения движется вниз, как бы убегая от шарика, поэтому его скорость, энергия и максимальная высота подскока в результате столкновения уменьшаются. Таким образом, максимальная высота подскока полностью зависит от того, какую фазу φ_n имела плитка в момент столкновения t_n.

Наблюдаемое в эксперименте увеличение с течением времени средней максимальной высоты подскока шарика наводит на мысль о том, что шарик чаще сталкивается с плиткой, движущейся навстречу ему, чем с движущейся от него. Для обоснования этого утверждения рассмотрим систему шарик — плитка в момент времени t^*, в который шарик падает вниз и имеет координату $x(t^*) = A$. Для движения плитки в момент t^* возможны несколько случаев.

1) Фаза плитки $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (рис.*а*). Плитка движется вверх, навстречу шарику, следовательно, столкновение приведет к увеличению энергии шарика.

2) $\varphi(t^*) \in \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис.*б*). Плитка движется вниз и имеет координату, близкую к $-A$. При достаточно малом ε за время падения шарика в пределах $x \in [-A, A]$ плитка успеет достигнуть нижней точки $x = -A$ и изменить направление своего движения. В этом случае столкновение шарика с плиткой произойдет при их движении навстречу друг другу, и в результате энергия шарика увеличится.

3) $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]$ (рис.*в*). Плитка движется вниз, причем ее координата намного отличается от $-A$, так что за время падения шарика от положения



$x(t^*) = A$ она не успевает достигнуть нижней точки $x = -A$ и изменить направление движения. В этом случае столкновение шарика с убегающей плиткой приведет к уменьшению его энергии.

Итак, увеличению энергии шарика соответствует промежуток фаз $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, 2\pi\right]$, а уменьшению — промежуток $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]$. Как видно, первый промежуток на 2ε шире, чем второй. Если предположить, что в момент t^* фаза плитки с равной вероятностью принимает значения от 0 до 2π, то наши рассуждения приводят к такому выводу: столкновения шарика с плиткой, движущейся навстречу, более вероятны, чем с движущейся в том же направлении, и, следовательно, происходят чаще. Значит, в среднем шарик чаще получает энергию, чем отдает, что и объясняет наблюдаемый рост средней максимальной высоты его подскока. В реальных условиях столкновения не могут быть абсолютно упругими, т.е. происходит переход энергии в тепло (диссипация). Этим фактом обусловлено существование предельной максимальной высоты подскока.

Задачу можно было бы считать решенной, если бы не предположение о равновероятном распределении фазы плитки в момент времени t^*. Вообще говоря, фазу столкновения всегда можно определить точно из законов движения шарика и плитки, почему же мы говорим о ней как о случайной величине, да еще и равномерно распределенной? Все дело тут в слове «точно». В действительности всякая физическая величина может быть определена лишь с известной степенью точности. Оказывается, если в определении фазы некоторого столкновения мы ошибемся на число порядка $10^{-3} \cdot 2\pi$, то уже через несколько столкновений значение фазы, полученное из расчета, будет отличаться от действительного на величину, сравнимую с 2π. Системы, в которых малое отклонение в значениях определяющих параметров приводит к существенным изменениям, в динамике принято называть *хаотическими*. Поведение таких систем на практике почти никогда не удается предсказать в точности, и поэтому об их состоянии в некоторый момент времени говорят с той или иной долей вероятности, как если бы на движение этих систем влияли случайные факторы.

Идея механической модели, описанной в задаче, впервые была предложена Э.Ферми для объяснения громадных энергий частиц, прилетающих на Землю в космических лучах. Потоки частиц, «сталкиваясь» с переменными магнитными полями галактик и газовых скоплений, ускоряются подобно тому, как ускоряется шарик при соударениях с массивной плиткой.

В этой связи возникает вопрос: может ли ускорение шарика продолжаться неограниченно долго? В случае неупругого столкновения ответ ясен: нет, не может, так как теряемая в виде тепла энергия увеличивается с ростом энергии шарика. Интересно, что, даже если соударения упругие, все равно энергия шарика будет ограничена. Хотя, согласно нашим рассуждениям, средняя энергия шарика должна возрастать, тем не менее, нужно понимать, что выражение для скорости шарика справедливо только в предположении, что энергия плитки много больше энергии подпрыгивающего шарика. Иными словами, мы считаем, что массивная плитка значительно изменяет энергию шарика, а шарик на движение плитки почти не влияет. Это допущение становится неверным, если средние энергии шарика и плитки сравнимы по величине. В этом случае, как нетрудно показать, увеличения средней энергии шарика при его столкновении с движущейся навстречу плиткой не происходит. Таким образом, средняя энергия шарика будет возрастать до тех пор, пока не станет сравнимой со средней энергией плитки.

Если интерпретировать шарик как малую частицу, а плитку как газ из массивных молекул, в который эта частица помещена, то наши рассуждения позволяют заключить, что средняя кинетическая энергия частицы будет увеличиваться, пока не сравняется со средней кинетической энергией молекул газа. Усмотрев это следствие из знаменитой теоремы Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы в задаче про гравитационную машину, мы могли бы сразу дать ответ на поставленный в ней вопрос. Необходимо заметить, однако, что правомерность обращения к теореме Больцмана существенно связана с хаотичностью (со стохастичностью) системы шарик — плитка. Характерной особенностью таких систем является своеобразная эволюция в их описании. Точно заданные законы движения содержат в себе хаотичность (при определенных условиях), которая в результате приводит к необходимости вероятностного описания.

Наука в двадцатом веке

В.ВАЙСКОПФ

(Начало см. на с. 10)

физику элементарных частиц, ядерную физику, атомную и молекулярную физику, физику конденсированных сред и т.д. Каждый уровень имеет собственные законы и концепции, основанные на взаимодействии квазиэлементарных объектов, состоящих из элементарных составляющих с более высокого уровня. При этом энергия связи этих элементарных составляющих меньше для более низких уровней. И внутреннее устройство составляющих не важно для процессов, изучаемых на каждом уровне. Существуют теории, описывающие процессы на каждом уровне без учета внутренней структуры элементов. Например, существенная часть ядерной физики имеет дело с протонами и нейтронами как частицами, не думая об их кварковом составе. Атомная и молекулярная физика работает с атомами, не зная ничего об атомных ядрах. И конечно, кварковая структура частиц совершенно не интересна для биологии, которая имеет собственные законы и концепции.

При движении с низших уровней к высшим возрастает сложность, появляются новые законы, которые не противоречат законам более низких уровней, но не могут быть выведены из них. В процессе расширения и остывания Вселенной она проходит стадии как бы от высших уровней вещества к низшим, создавая все более сложные объекты, пока не доходит до живых существ на Земле, а возможно и на других планетах.

Наличие таких более или менее разъединенных уровней науки приводит к нежелательному эффекту суперспециализации. Работая на одном из уровней, ученые практически ничего не знают о ситуации на других уровнях, поскольку эта информация совершено не нужна им для работы. К тому же, просто нет времени и возможности быть в курсе происходящего на других уровнях.

Окончание следует

Геометрические метаморфозы

В. ДУБРОВСКИЙ

Дерни за веревочку...
Ш. Перро. «Красная Шапочка»

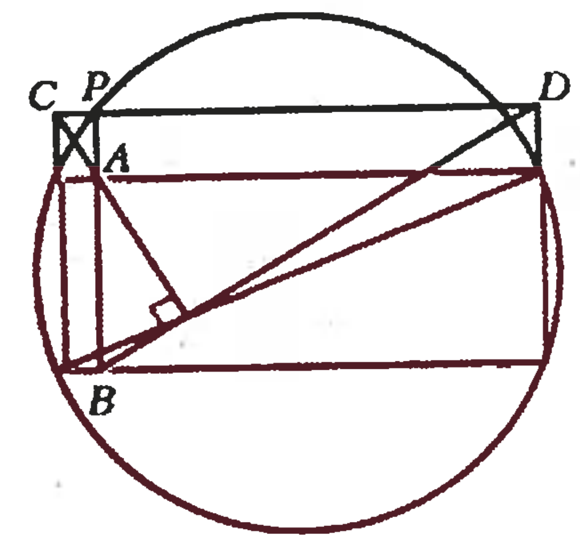


Рис. 1

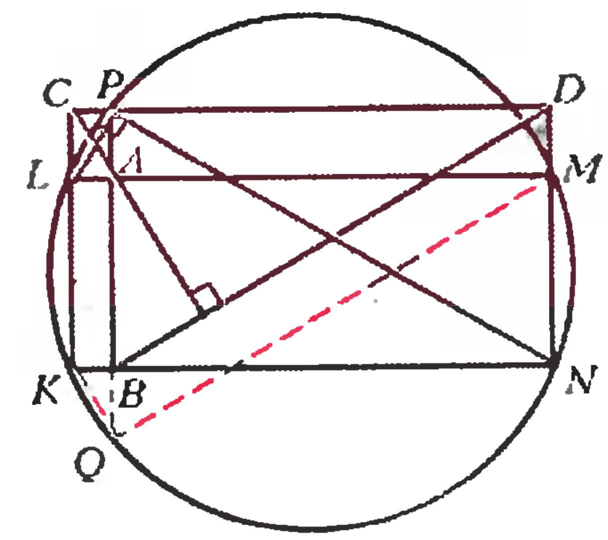


Рис. 2

Однажды, перелистывая старый «Квант», я наткнулся на такую задачу:

М546. *Из произвольной точки P окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры PA и PB на две его противоположные стороны и перпендикуляры PC и PD на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.*

По какой-то уже забытой причине она привлекла мое внимание. И обнаружилось, что эта несколько тяжеловесная по формулировке задача имеет неожиданно много разнообразных решений, использующих целый ворох полезных и поучительных идей. Оказалось также, что оба ее утверждения можно обобщить и прийти к интересным и важным геометрическим теоремам, давно ставшим классикой. На самом деле, эта ситуация достаточно типична для элементарной геометрии — собрания фактов, настолько тесно переплетенных друг с другом, что стоит «потянуть» за один из них, и почти наверняка вслед за ним потянется длинная цепочка других, принадлежащих к, казалось бы, далеким друг от друга областям этой красивейшей области науки (пожалуй, и искусства).

Один из методов, эффективно работающих в этой задаче, хорошо известен в... политике. Он выражается тремя словами: «разделяй и властвуй!». В применении к математике это означает выделение из задачи важных фрагментов, каждый из которых можно исследовать независимо от остальных. В нашем случае такое разделение напрашивается само собой: в задаче имеется два утверждения — о перпендикулярности (прямых AC и BD) и о «конкурентности»[1] (этих же прямых и диагонали прямоугольника). Эти утверждения мы подвергнем серии трансформаций, которые изменят их почти до неузнаваемости, но позволят выделить действительно существенные для их справедливости условия и в то же время «стереть случайные черты». И основным инструментом этих «геометрических преображений» будут — что неудивительно — «геометрические преобразования»: переносы, повороты, гомотетии... Мы увидим, как преобразования (в частности, такое мощное, но нечасто используемое преобразование, как «спиральное подобие») можно применять в доказательстве свойств, которые на первый взгляд не имеют никакого к ним отношения.

Но прежде чем приступить к осуществлению намеченного здесь плана, попробуйте решить нашу задачу самостоятельно. Очень может быть, что вы найдете решение, отличное от приведенных ниже — что ж, тем интереснее вам будет познакомиться с ними.

Начнем с первого утверждения задачи.

Доказательства перпендикулярности

На чертеже задачи (рис.1) масса прямых углов, и едва ли не первое, что приходит в голову — попробовать доказать, что угол между AC и BD равен одному из них.

1. Доказательство сдвигом и симметрией. Обозначим данный прямоугольник через $KLMN$ (рис.2). Отрезки AC и BD — это диагонали прямоугольников $PALC$ и $PDNB$. Их вторые диагонали, PL и PN, перпендикулярны, так как LN, будучи диагональю прямоугольника $KLMN$, является диаметром нашей окружности. А теперь остается заметить, что *если провести по диагонали в каждом из двух произвольных прямоугольников с соответственно параллельными сторонами, то угол между ними равен углу между двумя другими диагоналями* (рис.3,*а*). Это становится очевидным, если параллельно перенести один из прямоугольников так, чтобы его центр совпал с центром второго прямоугольника (рис.3,*б*): при параллельном сдвиге одной из любых двух данных прямых угол между ними не изменяется, а для прямоугольников, полученных после сдвига, рассматриваемые углы равны просто потому, что они симметричны (относительно любой из двух осей симметрии образовавшегося «креста»).

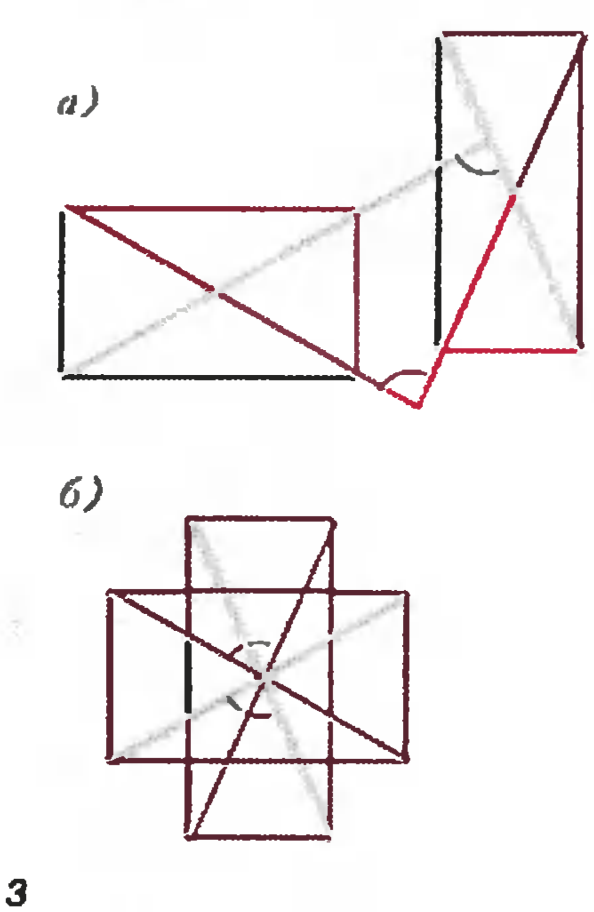


Рис. 3

Эта статья была опубликована в журнале «Квантум» в 1996 году.

[1] *Конкурентными (дословно — «сбегающимися») называют несколько прямых, имеющих общую точку.*

2. Доказательство параллельным переносом. Та же идея сравнения углов используется в следующем рассуждении. Продолжим PA до пересечения с окружностью в точке Q (рис.2). Как и в первом доказательстве, мы видим, что $\angle KQM = \angle KNM = 90°$. Теперь перпендикулярность AC и BD следует из того, что эти прямые соответственно параллельны KQ и QM.

Упражнение 1. Докажите, что прямая AC параллельна KQ, а BD параллельна QM.

Можно сказать, что здесь угол, образованный прямыми AC и BD, совмещается с углом KQM параллельным переносом.

3. Доказательство поворотом и гомотетией. Заметим, что поворот на 90° вокруг P переводит прямые PC, PL и PA в PB, PN и PD соответственно (на

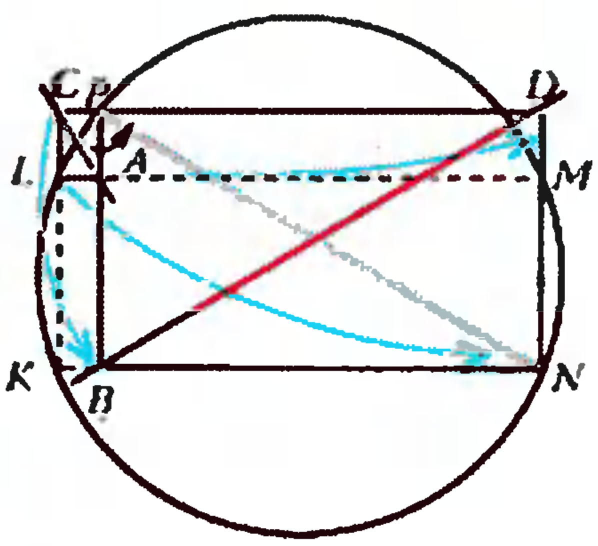


Рис. 4

рисунке 4 поворот выполняется против часовой стрелки). Это замечание подсказывает еще одно доказательство, в котором отрезок AC переводится непосредственно в BD. Выполним вслед за указанным выше поворотом гомотетию с центром P и коэффициентом PN/PL. В результате двух преобразований, т.е., как говорят, в результате их композиции, точка L, разумеется, перейдет в N. Куда перейдет A? Эту точку можно представить как ортогональную проекцию L на PB; поэтому ее образ — это пересечение прямой PD (образа PB) и перпендикуляра к PD, опущенного из N, образа L (ведь и поворот, и гомотетия, как и любые преобразования подобия, переводят прямые в прямые и сохраняют углы между ними). Следовательно, A переходит в D. Аналогично, C переходит в B. Итак, наше преобразование переводит AC в BD. А поскольку при повороте все прямые поворачиваются на один и тот же угол (в данном случае на 90°), а гомотетия сохраняет направления прямых, прямая BD, образ прямой AC, составляет с AC прямой угол.

В литературе встречаются различные названия для преобразования подобия, представимого как композиция поворота и гомотетии с общим центром[2]. Мы примем термин *спиральное подобие*, предложенный Г.С.М.Коксетером и С.Л.Грейтцером в их замечательной книжке «Новые встречи с геометрией» (М., «Наука», 1978); другие названия — «поворотная гомотетия» и «центрально-подобное вращение». При спиральном подобии все прямые поворачиваются на один и тот же угол — это свойство было использовано в нашем третьем доказательстве. Другое его свойство нам понадобится ниже в одном из доказательств второго утверждения задачи.

Теорема Брахмагупты

Как мы видели (см. упражнение 1), прямая QM на рисунке 2 параллельна BD. Это наблюдение позволяет облечь первое утверждение нашей задачи в более изящную форму, известную как теорема Брахмагупты:

Если диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, перпендикулярны, то перпендикуляр к стороне четырехугольника, проведенный через точку их пересечения, делит пополам противоположную сторону.

Точнее говоря, наше утверждение равносильно обратной теореме, которая моментально выводится из прямой доказательством «от противного» — если рассматриваемая в ней прямая (на рисунке 5 это прямая AE) делит попо-

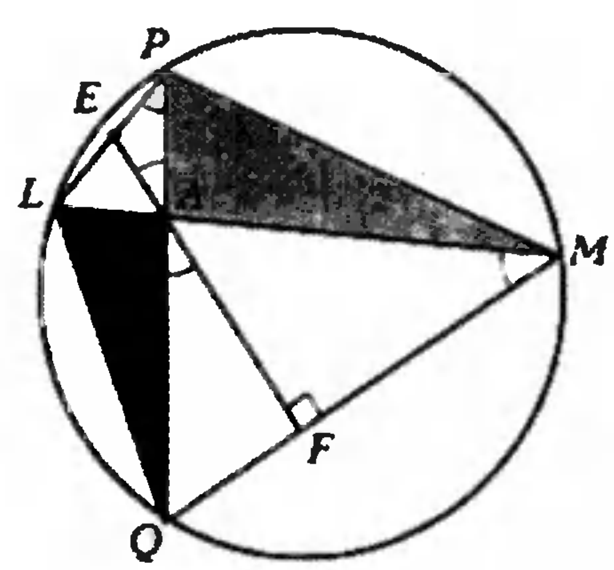


Рис. 5

лам какую-то сторону четырехугольника (сторону PL четырехугольника $PLQM$), то она перпендикулярна к противоположной стороне (QM).

Вы можете доказать эту теорему непосредственно, например, установив равенство четырех углов, отмеченных дужками на рисунке 5, или приспособить одно из доказательств, рассмотренных выше. Сейчас же мы сразу перейдем к ее красивому обобщению.

Представим, что треугольники AQL и AMP на рисунке 5 соединены в их общей вершине A шарниром. Повернем один из треугольников относительно

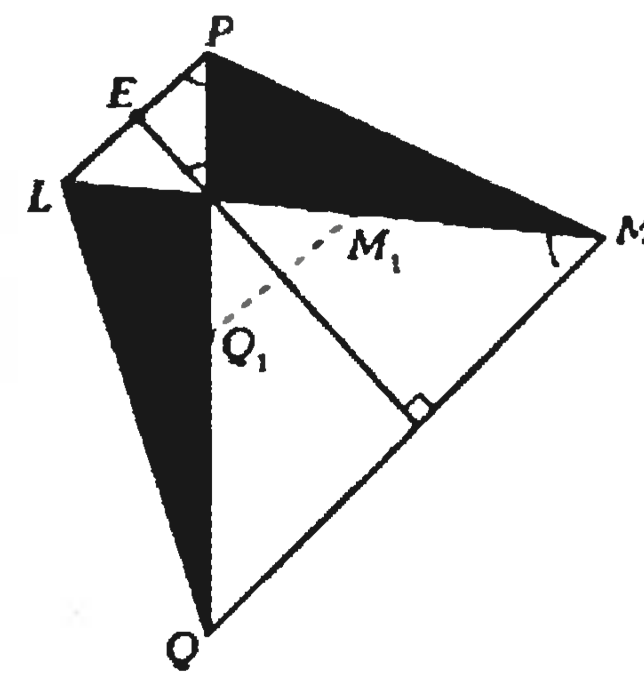


Рис. 6

другого (рис.6). Оказывается, что при этом утверждение теоремы Брахмагупты (для сторон PL и QM) останется в

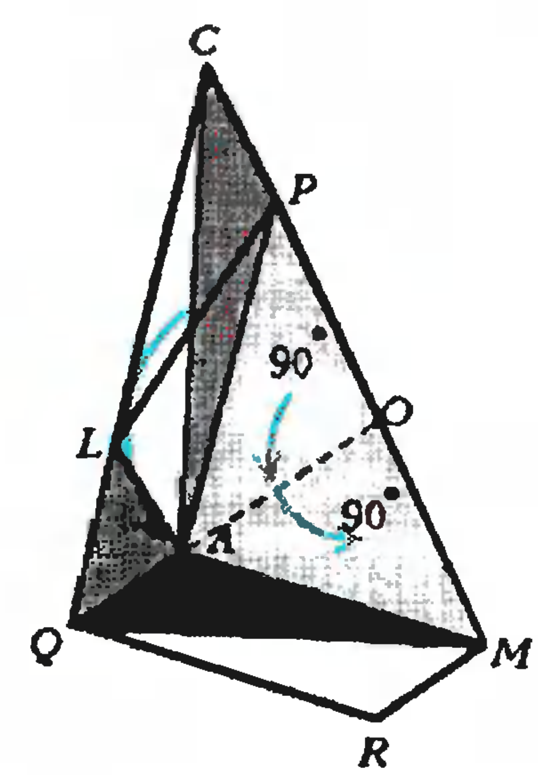


Рис. 7

силе. Другими словами, *если при соединении точки A, взятой внутри четырехугольника $LPMQ$, с его вершинами образуются подобные прямоугольные треугольники ALQ и APM (с равными углами при L и P и при A, причем углы при A прямые), то перпендикуляр, опущенный из A на QM, при продолжении делит LP пополам.*

В частном случае, когда подобные треугольники, о которых здесь говорится, являются прямоугольными равнобедренными, этот факт хорошо известен. Его можно доказать так: достраиваем треугольники ALP и AQM до параллелограммов $ALCP$ и $AQRM$ (рис.7) и убеждаемся, что при повороте на 90° вокруг середины PM первый

[2] *Заметим, кстати, что любое преобразование подобия плоскости, сохраняющее ориентацию и отличное от параллельного переноса, можно представить именно в таком виде.*

параллелограмм переходит во второй; при этом CA переходит в QM и, стало быть, $CA \perp QM$ (детали оставляются читателю). Общий же случай сводится к этому частному: достаточно отложить на AQ и AM отрезки AQ_1 и AM_1, равные AL и AP соответственно (рис.6), и заметить, что в силу подобия треугольников ALQ и APM прямые QM и Q_1M_1 параллельны ($AQ/AQ_1 = AM/AM_1$), а к четырехугольнику Q_1M_1PL можно применить указанный частный случай.

Справедлив и еще более общий результат с произвольными (не обязательно прямыми) углами (см. задачу М1505).

Доказательства конкуррентности

Обратимся к доказательствам второго утверждения нашей задачи — о том, что прямые AC и BD пересекаются на диагонали (на наших рисунках — KM) данного прямоугольника.

1. Доказательство с помощью описанных окружностей. Одно из первых неписаных правил решения геометрических задач состоит в том, что если у вас есть несколько прямых углов, опирающихся на один отрезок, то нужно построить на нем как на диаметре окружность (она пройдет через вершины всех этих углов). И наша задача — не исключение.

Пусть AC и BD пересекаются в точке J (рис.8). Покажем, что отрезки JK и

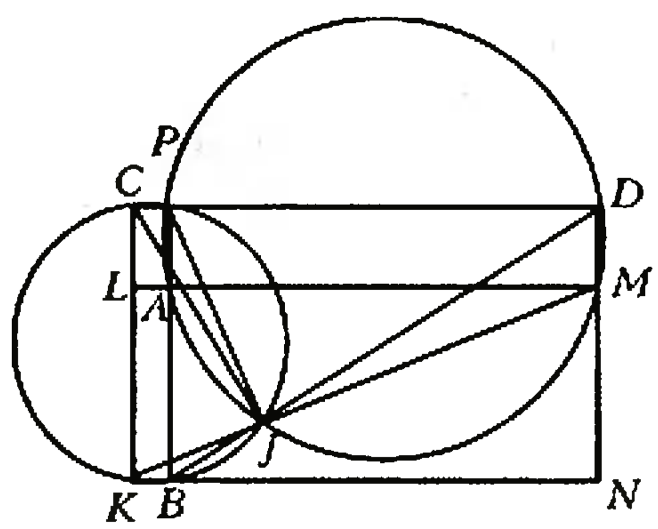


Рис. 8

JM образуют одну прямую. Мы уже доказали в первой части, что $\angle BJC = 90°$, т.е. J лежит на описанной окружности прямоугольника $PBKC$ так, что угол PJK тоже прямой. Аналогично, J лежит на описанной окружности прямоугольника $PAMD$, и потому $\angle PJM = 90°$, а значит, угол KJM — развернутый.

2. Доказательство с помощью спирального подобия пересекающихся окружностей. Мы уже использовали спиральное подобие в третьем доказательстве перпендикулярности. Гораздо менее очевидным образом этот вид преобразований, точнее, одно его очень полезное свойство, можно использовать для прямого, без использования перпендикулярности AC и BD, доказательства конкуррентности. Вот это свойство:

Допустим, что при спиральном подобии S с центром в точке A на данной окружности ω_1 эта окружность переходит в окружность ω_2. Тогда прямая, соединяющая произвольную точку X_1 на ω_1 с ее образом $X_2 = S(X_1)$ на ω_2, всегда проходит через вторую точку пересечения окружностей B (рис.9).

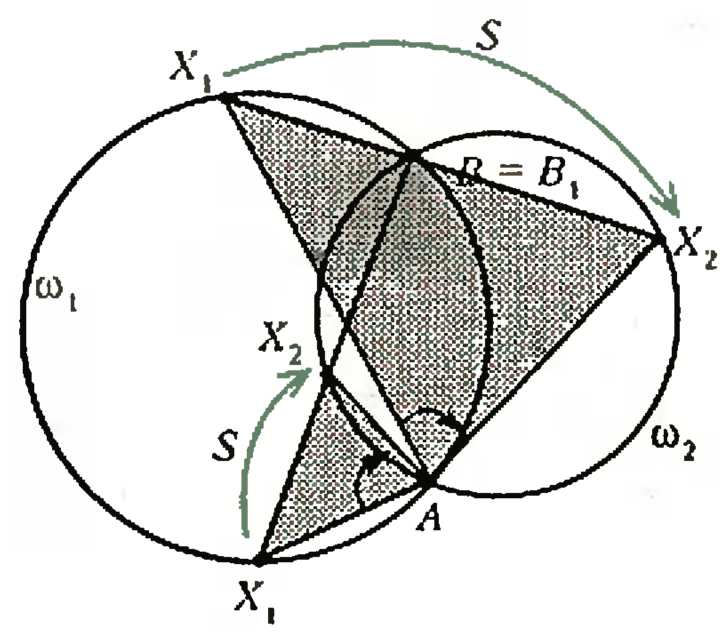


Рис. 9

Для доказательства заметим, что, по определению спирального подобия, во всех треугольниках AX_1X_2, где $X_2 = S(X_1)$ — образ X_1 при преобразовании S (см. рис.9, на котором показаны два примера таких треугольников), одинаковы угол при вершине A — он равен углу поворота — и отношение сторон AX_2/AX_1, равное коэффициенту этого подобия. Следовательно, эти треугольники подобны между собой и, в частности, имеют постоянный угол при вершине X_1. Если точка X_1 берется на окружности ω_1, то этот угол будет вписанным в нее[3], и значит, высекает на ней дугу AB_1 постоянной величины. Другими словами, прямая X_1X_2 пересекает окружность ω_1 в фиксированной точке B_1. Аналогично, и точка B_2 ее пересечения с окружностью ω_2 фиксирована (потому что угол AX_2X_1, вписанный в ω_2, также постоянен). А так как обе эти точки принадлежат *всем* прямым X_1X_2, они совпадают и лежат

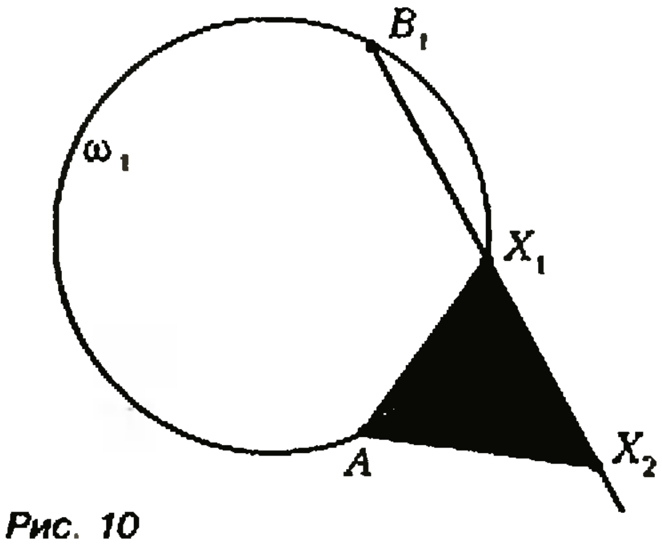


Рис. 10

одновременно на ω_1 и ω_2, т.е. $B_1 = B_2 = B$.

Вернемся к нашей задаче (рис.8). Замечаем, что точно так же, как и в третьем доказательстве перпендикулярности, прямоугольник $PCKB$ можно перевести в $PAMD$ спиральным подобием с центром P и углом поворота 90°. А теперь остается применить только что доказанное свойство к этому спиральному подобию, описанным окружностям прямоугольников, точкам C, K, B и их образам A, M, D: мы сразу получаем, что прямые CA, KM и BD проходят через общую точку J ($\neq P$) этих окружностей, что и требуется.

Прежде, чем двинуться дальше, познакомьтесь еще с несколькими примерами применения рассмотренного свойства.

Упражнения

2. Прямая, проходящая через точку P пересечения двух окружностей, пересекает их вторично в точках A и B. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

3. В условиях предыдущего упражнения проведем через A и B касательные к окружностям, на которых эти точки лежат. Докажите, что точка пересечения касательных, точки A и B, а также точка пересечения окружностей, отличная от P, лежат на одной окружности.

На самом деле это свойство отлично «работает» во многих задачах с пересекающимися окружностями. Сейчас мы убедимся в этом еще раз, доказав классическую теорему, которая позволит взглянуть на нашу исходную задачу с новой точки зрения.

Прямые Симсона

Теорема, о которой идет речь, была доказана У.Валлисом (так по традиции пишут фамилию *Wallace*, принадлежащую известному английскому математику) в 1797 году. Однако, как это очень часто случается в математике, ее ошибочно приписали Р.Симсону. Она утверждает, что

проекции точки P, взятой на описанной окружности треугольника ABC,

[3] *Строго говоря, это верно только для точек на ω_1, но вне ω_2. Если точка X_1 окажется внутри ω_2 (рис.10), то угол AX_1X_2 будет смежным с вписанным углом. Впрочем, на справедливости дальнейших выводов это не сказывается. Нам не пришлось бы рассматривать разные случаи, если бы мы воспользовались здесь ориентированными углами.*

на его стороны (или их продолжения) лежат на одной прямой.

Эта прямая называется прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

Доказательство иллюстрирует рисунок 11, на котором проекции точки P на

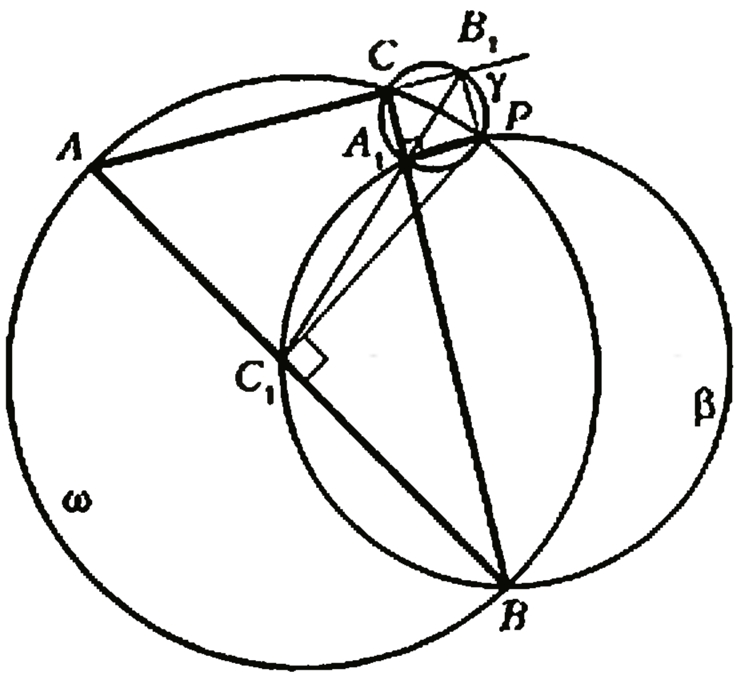


Рис. 11

описанной окружности ω треугольника ABC на его стороны обозначены, соответственно, A_1, B_1 и C_1. Построим на отрезках PB и PC как на диаметрах окружности β (которая пройдет через A_1 и C_1) и γ (которая пройдет через A_1 и B_1). Теперь выполним последовательно спиральное подобие S_1 с центром P, переводящее β в ω, а затем спиральное подобие S_2 с тем же центром, переводящее ω в γ.

Ясно, что в результате мы получим спиральное подобие S с центром P, переводящее β в γ. Посмотрим, что происходит с точкой C_1 при этом преобразовании. По доказанному нами свойству, преобразование S_1 переводит ее во вторую точку пересечения прямой BC_1 с ω – т.е. в A. Аналогично, $S_2(A) = B_1$. Таким образом, $S(C_1) = B_1$, а значит C_1B_1 проходит через точку пересечения β и γ, отличную от P, т.е. через A_1, и мы доказали, что три проекции лежат на одной прямой.

А сейчас снова посмотрим на чертеж нашей исходной задачи (рис.8). По условию точка P лежит на общей описанной окружности треугольников KLM и MNK. Очевидно, ее прямая Симсона относительно первого треугольника – это AC, а относительно второго – BD. Поэтому обе эти прямые проходят через проекцию J точки P на общую сторону KM этих треугольников, что и доказывает второе утверждение задачи.

Интересно, что и первое утверждение (о перпендикулярности) тоже можно получить с помощью прямых Симсона, хотя и не столь изящно, как второе. Замечаем, что при симметрии относительно центра данной окружности треугольник MNK переходит в треугольник KLM, а точка P – в диаметрально противоположную точку P'; значит, прямая BD переходит в прямую Симсона l точки P' относительно треугольника KLM. Таким образом, эти две прямые параллельны. С другой стороны, можно доказать (попробуйте!), что угол между прямыми Симсона двух точек P и P' относительно одного и того же треугольника равен половине угловой величины дуги PP' его описанной окружности. В нашем случае эта дуга есть полуокружность, т.е. соответствующие прямые Симсона (точек P и P' относительно треугольника KLM) перпендикулярны: $AC \perp l$. А так как l параллельна BD, получаем, что $AC \perp BD$.

Теорема Паппа

Мы видели, что первое утверждение нашей задачи можно существенно расширить. Второе утверждение допускает еще более впечатляющее обобщение. Оказывается, что оно остается справедливым без всяких прямых углов и окружностей. Существенно лишь то, что на чертеже имеются *две пересекающиеся тройки параллельных прямых.*

Они образуют несколько параллелограммов (а кстати, сколько?). Выберем любые три параллелограмма так, чтобы каждые два из них имели ровно одну общую вершину. Другими словами, выберем из девяти точек пересечения наших прямых три так, чтобы на каждой прямой была выбрана ровно одна точка – эти три точки и есть общие вершины выбираемых параллелограммов, а стороны образованного ими треугольника (красный треугольник на рисунке 12) являются их диагоналями.

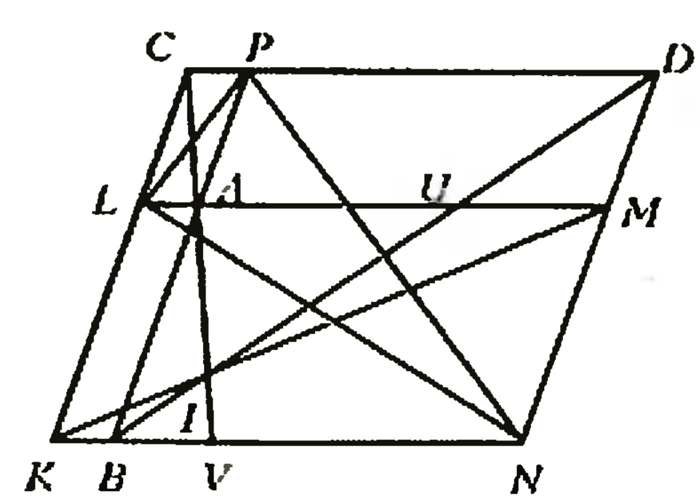


Рис. 12

Тогда три другие диагонали параллелограммов (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

(Контрольный вопрос: сколькими способами можно выделить «красный треугольник» на нашем рисунке?)

Докажем эту теорему для параллелограммов $ALCP$, $BPDN$ и $KLMN$ на рисунке 12 (эти обозначения отвечают исходной задаче). Естественно, это доказательство, после соответствующей смены обозначений, будет верным и при любом другом выборе тройки параллелограммов.

Мы должны доказать, что прямые KM, CA и BD пересекаются в одной точке или что BD проходит через точку J, в которой пересекаются прямые KM и CA. Обозначим через U и V точки пересечения прямых BD и LM, CA и KN, соответственно. Из подобия треугольников ALC и VBA и равенства противоположных сторон параллелограммов получаем равенства

$$\frac{KB}{BV} = \frac{LA}{BV} = \frac{CL}{AB} = \frac{PA}{AB}.$$

Из подобия треугольников UBA и UDM получаем

$$\frac{MU}{UA} = \frac{DM}{AB} = \frac{PA}{AB},$$

поэтому $KB/BV = MU/UA$. Отсюда и следует, что прямая $BU = BD$ проходит через J. (Действительно, треугольники KJV и MJA гомотетичны относительно J, значит, точки B и U, делящие отрезки KV и MA в одинаковом отношении, являются соответственными при гомотетии с центром J, т.е. лежат на прямой, проходящей через J.)

Упражнение 4. Докажите, что середины диагоналей четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон, лежат на одной прямой. (Эта прямая называется прямой Гаусса.)

А теперь я хочу поделиться одним секретом геометрической «кухни» и объяснить, как можно было догадаться, что условия утверждения о конкурентности можно ослабить, избавившись в них от всяческих перпендикулярностей. Здесь опять помогают преобразования, но уже другого рода.

Представим, что чертеж к нашей задаче (рис.1) нарисован на прозрачной плоскости, и рассмотрим тень, отбрасываемую им на другую плоскость при освещении пучком параллельных лучей. Иначе говоря, параллельно спроектируем его на другую плоскость. Известно (и, в сущности, очевидно), что проекция прямой есть прямая [4] и что параллельная проекция сохраняет параллельность прямых. С другой стороны, такие объекты, как прямые углы или окружности, при параллельной проекции, вообще говоря, не сохраня-

[4] *Если только эта прямая не параллельна направлению проекции.*

ются; например, из окружностей получаются эллипсы. Таким образом, ни перпендикуляров, ни описанной окружности после проекции на чертеже не будет, да и прямоугольника, вокруг которою она была описана, не останется — он превратится в параллелограмм. Однако прямые AC, BD и KM по-прежнему будут пересекаться в одной точке, а все в целом будет выглядеть примерно как рисунок 12. Более того, можно показать, что любые две пересекающиеся тройки параллельных прямых можно представить как проекцию соответствующих прямых с чертежа нашей задачи. В этом смысле второе утверждение задачи и доказанный выше более общий факт равносильны.

Итак, параллельная проекция позволила нам выделить свойства рассматриваемой картинки, «отвечающие» за конкуррентность. Можно пойти дальше и подвергнуть чертеж еще более существенному искажению, производимому *центральной проекцией*, заменив параллельный пучок света пучком лучей от точечного источника. Центральная проекция, как и параллельная, сохраняет коллинеарность точек, однако, вообще говоря, не сохраняет параллельность: совокупность нескольких параллельных между собой прямых превращается в набор прямых, проходящих через одну и ту же точку (рис.13). Таким образом, в результате центральной проекции конфигурация, изображенная на рисунке 12, превратится в нечто вроде того, что изображено на рисунке 14, а соответствующее утверждение о конкуррентных диагоналях параллелограммов — в следующую теорему:

Пусть a, b, c и a', b', c' — две тройки конкуррентных прямых. Тогда три прямые, соединяющие попарно точки пересечения прямых $a \cap b'$ и $a' \cap b$, $b \cap c'$ и $b' \cap c$, $c \cap a'$ и $c' \cap a$, конкуррентны (пересекаются в одной точке).

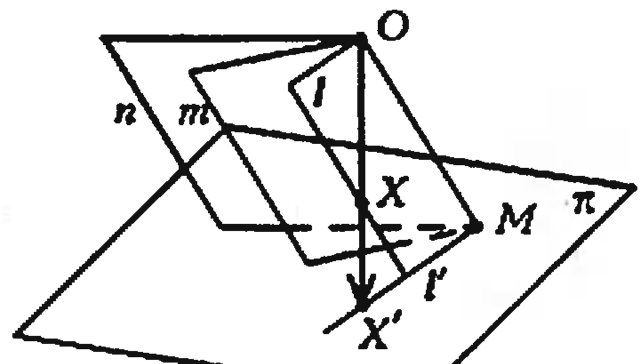


Рис. 13. Проекция из центра O на π плоскость переводит точку X в X', а прямую l, проходящую через X, в $l' = X'M$, где M — такая точка плоскости, что OM параллельна l. Центральные проекции прямых n и m, параллельных l, также проходят через M.

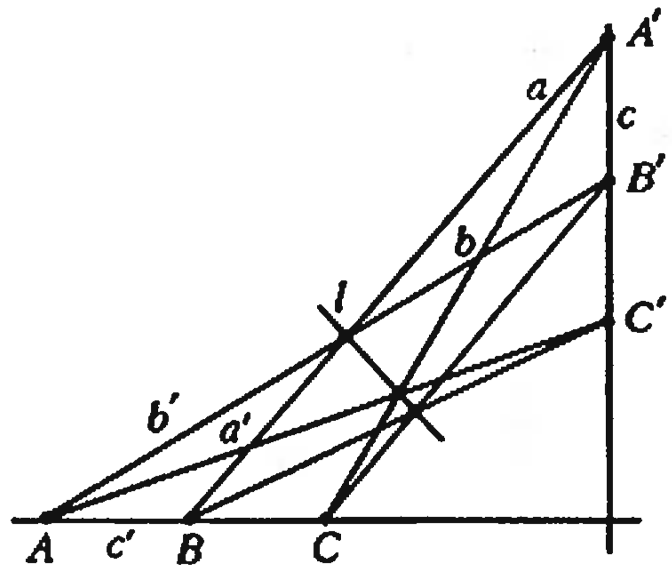


Рис. 14

Интересно, что эта теорема равносильна утверждению, которое получается из нее заменой слов «прямая» и «точка», «конкуррентность» и «коллинеарность» друг на друга:

Пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки коллинеарных точек. Тогда три точки пересечения пар прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ коллинеарны (т.е. лежат на одной прямой).

Этот факт является одной из фундаментальных теорем геометрии (точнее говоря, проективной геометрии); он называется *теоремой Паппа*.

Два утверждения о точках и прямых, которые, подобно последним, получаются одно из другого перестановкой этих двух понятий, называются *двойственными* друг другу. В проективной геометрии, которая изучает свойства, сохраняющиеся при центральной проекции, утверждение, двойственное к верному, всегда само верно.

Упражнение 5. Покажите, что теорема Паппа и двойственное к ней утверждение являются просто переформулировками друг друга. Расставьте обозначения на рисунке 14 в соответствии с рисунком 12 и попробуйте разобраться, как теорема о конкуррентных диагоналях параллелограмма получается из теоремы, двойственной к теореме Паппа.

Не будем доказывать теорему Паппа отдельно. Одно из доказательств состоит в том, чтобы перейти от рисунка 14 обратно к рисунку 12 с помощью подходящей центральной проекции: ее можно выбрать так, чтобы «отправить точки A и A' на бесконечность», т.е. превратить прямые, сходящиеся в этих точках, в параллельные. Можно «отправить на бесконечность» и другие элементы чертежа (например, прямую $A'B'$ или прямую l) и таким образом свести теорему к одному из ее, как говорят, «аффинных вариантов». Эти варианты весьма разнообразны и не похожи один на другой. Любителям геометрии безусловно доставит удовольствие их исследование. С этим полезным занятием автор и оставляет читателя, хотя, упомянув теорему Паппа, он получил прекрасный повод продолжать этот рассказ дальше и дальше...

НОВОСТИ НАУКИ

ВСЕЛЕННАЯ — КРИСТАЛЛ

Мы привыкли предполагать, что в больших масштабах материя в космосе распределена более или менее равномерно. Это один из основополагающих принципов мироздания — однородность и изотропность Вселенной. Иначе говоря, галактики и скопления галактик должны быть разбросаны по космосу случайно.

Эстонские астрономы из обсерватории в Тарту под руководством профессора Эйнасто обнаружили, что это не так. Изучая большой массив данных, они обнаружили, что сверхскопления образуют узлы повышенной концентрации и расстояние между ними порядка 120 мегапарсек (это около четырехсот миллионов световых лет). Конечно, кое-что встречается и в промежутках между узлами, но большинство объектов сосредоточено в узлах, аналогично расположению атомов в кристаллической решетке.

Первый сигнал о том, что есть такая структура, поступил семь лет назад, но тогда ученые заметили периодичность на маленьком массиве галактик, расположенных вдоль одного направления, и к их результатам не прислушались. Теперь его статистическая достоверность резко увеличилась. Придется серьезно задуматься: что за силы и законы делают нашу Вселенную похожей на кристалл? Один из астрофизиков — Марк Дэвис из Калифорнии — сказал, что если результ Эйнасто подтвердится, то получится, что мы знаем о космосе даже меньше нуля.

А. Семенов

Электромеханические задачи

В.МОЖАЕВ

Среди разнообразных физических задач есть так называемые смешанные задачи, которые нельзя отнести к какому-то одному определенному разделу физики. В таких задачах, как и в природных процессах, тесным образом переплетаются различные физические явления. В этой статье мы рассмотрим задачи, которые можно причислить к разряду электромеханических — в них речь идет о движении механических систем при воздействии на них электрических и магнитных сил.

Задача 1. *Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома водорода (энергия ионизации), равна $W_i = 2{,}2 \cdot 10^{-18}$ Дж. Полагая, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона), определите силу электростатического взаимодействия между электроном и протоном.*

Слово «тяжелое» по отношению к ядру означает, что его масса много больше массы электрона, и поэтому можно считать, что центр вращения системы протон — электрон совпадает с центром масс протона. Обозначим радиус круговой орбиты электрона через r. Движение электрона по окружности радиусом r происходит под действием электростатической силы, действующей на электрон со стороны протона. Второй закон Ньютона позволяет записать:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2},$$

где m — масса электрона, v — его скорость, e — величина заряда. С помощью этого уравнения найдем кинетическую энергию электрона:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия электрона и протона, как системы точечных зарядов, равна

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Таким образом, полная энергия электрона, находящегося на круговой орбите радиусом r в атоме водорода, составляет

$$W = W_k + W_p = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

(Как это и характерно для финитного движения частицы в потенциальном поле, полная энергия электрона является отрицательной величиной.)

Очевидно, что минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома водорода, соответствует такому новому состоянию электрона, когда он находится на большом (много больше радиуса орбиты) расстоянии от атома и его скорость равна нулю. В этом состоянии полная энергия электрона также равна нулю, поэтому минимальная дополнительная энергия, сообщенная ему, составляет

$$W_i = -W = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Отсюда находим радиус орбиты электрона:

$$r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 W_i}$$

и силу электростатического взаимодействия электрона с протоном:

$$F_{эл} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 W_i^2}{e^2} = 8{,}4 \cdot 10^{-8}\ \text{Н}.$$

Задача 2. *Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом q и массой m, связаны нерастяжимыми нитями длиной L каждая. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Одна из нитей пережигается. Какие скорости будут у шариков в тот момент, когда они будут располагаться на одной прямой? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.*

В начальный момент шарики расположены в вершинах равностороннего треугольника с длиной каждой стороны L (рис.1). Шарики неподвижны, поэтому их полная кинетическая энергия равна нулю:

$$W_{k1} = 0.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия составляет

$$W_{p1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

(В этом выражении каждый член соответствует энергии взаимодействия пары зарядов, а всего таких пар три.) Поскольку нить нерастяжима, энергия упругих деформаций равна нулю. Итак, в

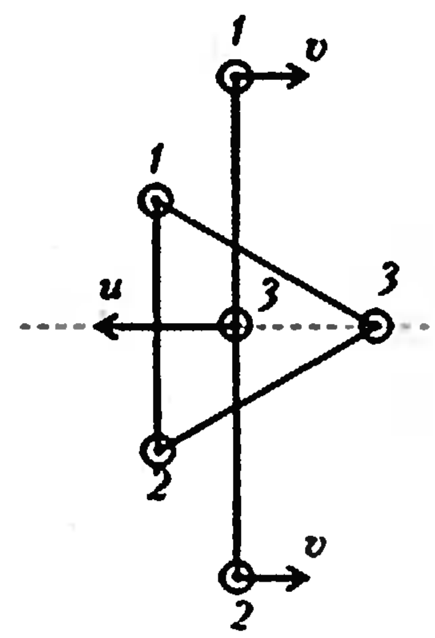


Рис. 1

исходном состоянии полная энергия системы составляет W_{p1}, а импульс системы равен нулю.

После пережигания нити (например, между шариками 1 и 2) центр масс шариков остается неподвижным, и когда шарики будут располагаться на одной прямой, шарик 3 будет находиться в центре масс нашей системы. Действительно, как до пережигания нити, так и после пережигания между шариками действуют только внутренние силы (замкнутая система), а так как начальная скорость центра масс была равна нулю, то центр масс системы будет оставаться неподвижным.

Пусть в тот момент, когда шарики расположены на одной прямой, скорость шарика 3 равна u, а скорости двух других шариков равны v (в силу симметрии, скорости шариков 1 и 2 одинаковы). По закону сохранения импульса,

$$mu - 2mv = 0,\ \text{или}\ u = 2v.$$

Кинетическая энергия шариков в этот момент равна

$$W_{k2} = \frac{mu^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2} = 3mv^2.$$

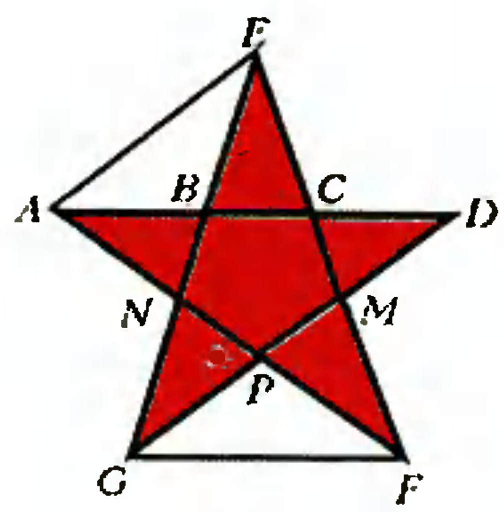
Новая потенциальная энергия электростатического взаимодействия состав

(Продолжение см. на с. 34)

Число Фидия — золотое сечение

Пятиконечная звезда постоянно привлекала внимание людей своим совершенством. Пифагорейцы – ученики школы Пифагора – выбрали в качестве символа своего союза именно эту звезду. Она же считалась у них амулетом здоровья. И сейчас пятиконечная звезда красуется на флагах и гербах многих стран. В чем же ее привлекательность?

Дело в том, что в этой звезде наблюдается удивительное постоянство отношений составляющих ее



отрезков. Взгляните на рисунок. Трудно в это поверить, но

$$AD : AC = AC : CD = AB : BC = \\ = AD : AE = AE : EC.$$

Пользуясь симметрией звезды, этот ряд равенств можно еще очень долго продолжать.

А чему же равно это отношение? Чтобы его найти, обозначим $AD = a$, $AC = b$ и воспользуемся первым равенством. Так как $CD = a - b$, то из первого равенства отношений следует, что $a : b = b : (a - b)$, или $a^2 - ab - b^2 = 0$. Разделив обе части этого уравнения на b и обозначив $a/b = \Phi$, получим уравнение $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, откуда

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

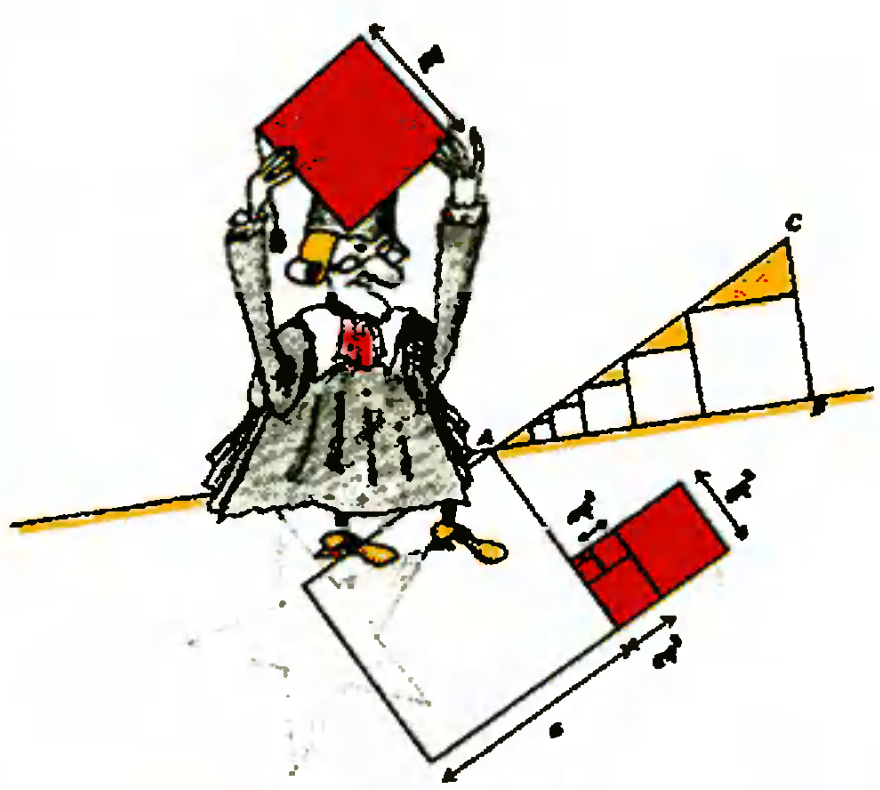
Второй корень этого уравнения отрицателен и нас сейчас не интересует. Часто рассматривают не отношение большего отрезка к меньшему, а обратную к нему величину – отношение меньшего отрезка к большему. Число $1/\Phi$ обозначается буквой φ, оно равно $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$. Отметим, что Φ и φ – прописная и строчная формы греческой буквы «фи». Такое обозначение принято в честь древнегреческого скульптора и архитектора Фидия, жившего в V веке до н.э.

Но вернемся к самим числам

$$\Phi = 1{,}618034\ldots \text{ и } \varphi = 0{,}618034\ldots$$

Вы обратили внимание на то, что приведенные здесь значения чисел Φ и φ отличаются только первой цифрой? Что это – случайность? Удивительно, но и все следующие знаки этих чисел будут совпадать. Этот факт заложен в самом уравнении для числа Φ:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$



Перепишем его в виде

$$\Phi - 1 = 1/\Phi,$$

откуда видно, что числа Φ и φ различаются ровно на 1.

Если то же уравнение переписать в виде $\Phi^2 = 1 + \Phi$, то, заменяя Φ под корнем на $\sqrt{1+\Phi}$, получим

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}.$$

Продолжая эту процедуру еще и еще раз, и так до бесконечности, получим красивую формулу

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}.$$

А вот еще одна красивая формула для числа Φ:

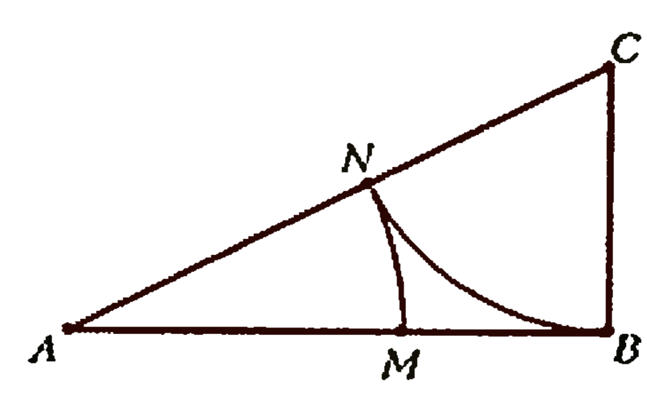
$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

Эта формула получается, если в преобразованном уравнении $\Phi = 1 + 1/\Phi$ заменить Φ в знаменателе на это же выражение:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}},$$

и так далее.

А как разделить отрезок в отношении Φ? Такое построение, производимое циркулем и линейкой, содержится уже в знаменитых «Началах» Евклида, написанных за 300 лет до нашей эры. Процесс построения хорошо виден на рисунке. Сначала к отрезку AB, который мы хотим разделить в отношении Φ, восставляется перпендикуляр BC, длина которого равна половине длины отрезка AB. Затем проводится отрезок AC – гипотенуза треугольника ABC. Далее проводятся две окружности: одна с центром в точке C и радиусом BC, а вторая с



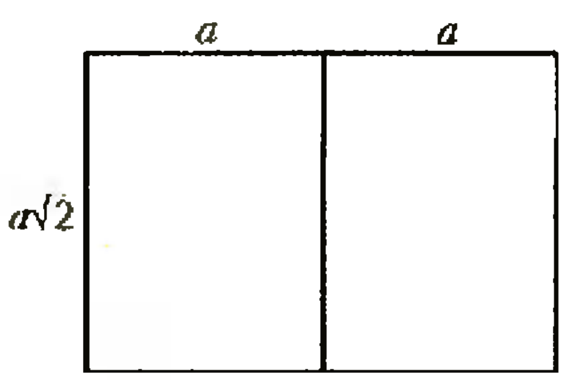
центром в точке A и радиусом AN, где точка N – точка пересечения первой окружности с отрезком AC. Точка M, в которой вторая окружность пересекает отрезок AB, и будет делить отрезок AB в отношении Φ, т.е. $AM : MB = \Phi$.

Пропорция, выражаемая числом

Ф, по мнению многих исследователей, является наиболее приятной для человеческого глаза.

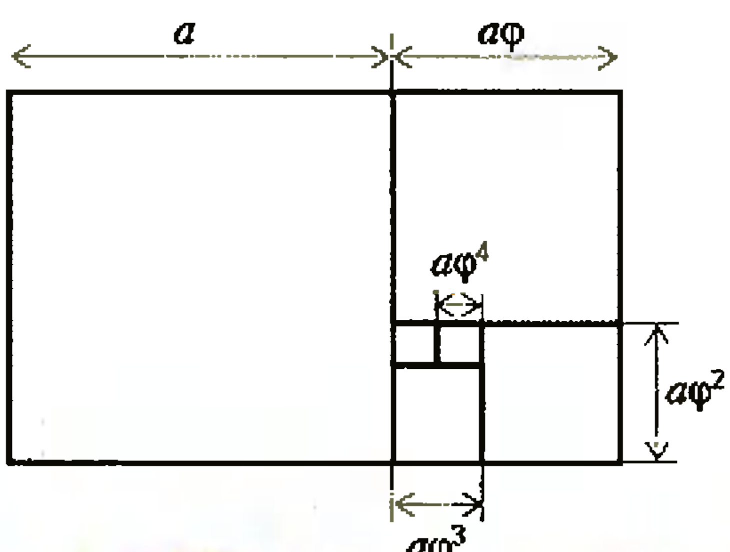
Леонардо да Винчи считал, что идеальные пропорции человеческого тела должны быть связаны с числом Ф. Деление отрезка в отношении Ф он назвал «золотым сечением». В эпоху Возрождения «золотое сечение» было очень популярно среди художников, скульпторов и архитекторов. Размеры картины было принято брать такими, чтобы отношение ширины к высоте равнялось Ф. Этот термин сохранился до наших дней, и само «золотое сечение» по прежнему играет важную роль в искусстве. Им руководствовался, например, великий архитектор Ле Корбюзье.

Прямоугольник с таким отношением сторон стали называть «золотым прямоугольником». Форму «золотого сечения» придавали книгам, столам, почтовым открыткам. В дальнейшем книгам и другим бумажным изделиям стали чаще придавать форму прямоугольника с отношением

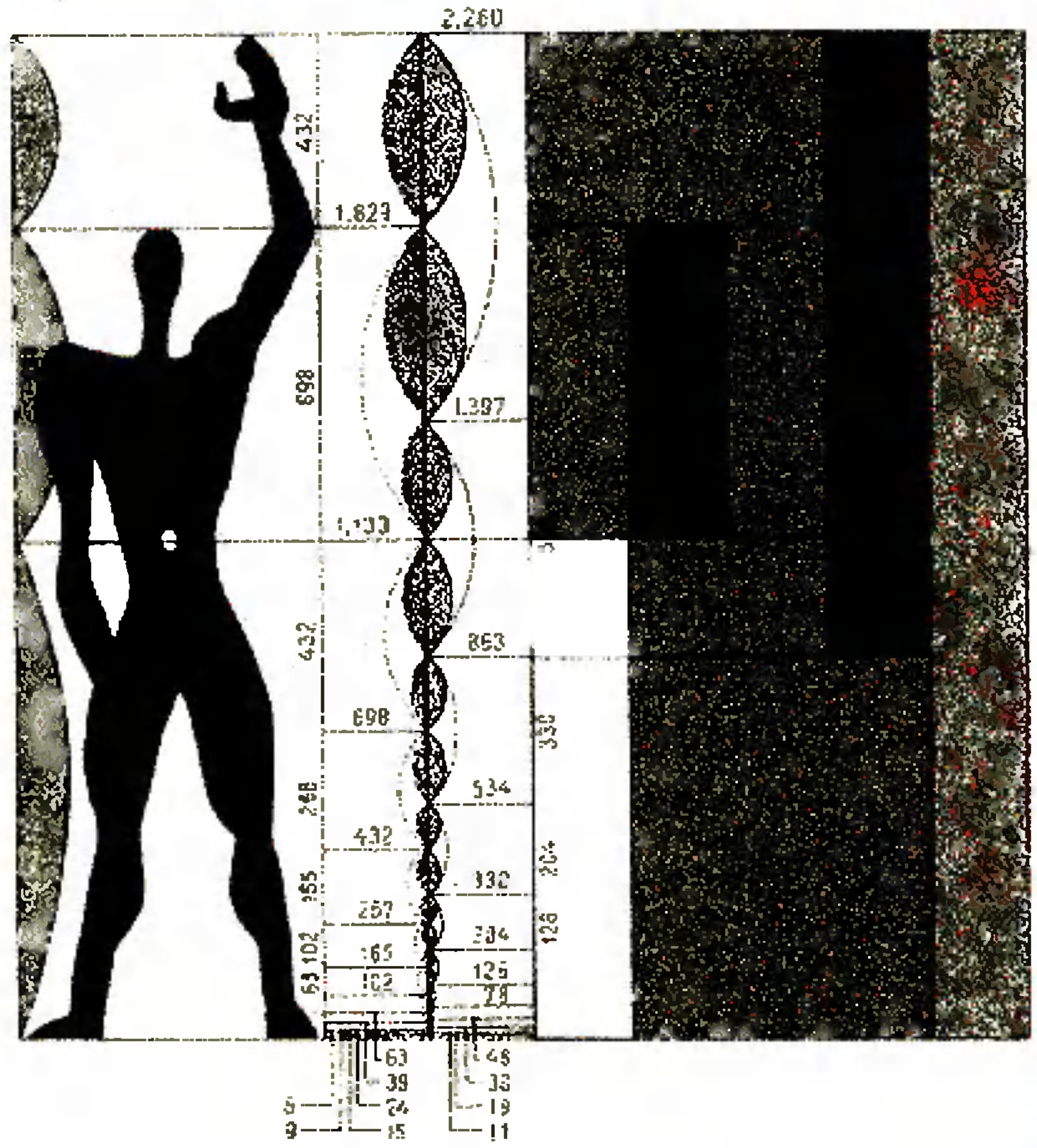


сторон $\sqrt{2}$. Это связано с тем, что при перегибании такого прямоугольника по средней линии образуются два прямоугольника с тем же соотношением сторон.

В этом смысле «золотой прямоугольник» также обладает интересным свойством: если от него отрезать квадрат, то останется вновь «золотой прямоугольник». Этот процесс можно продолжать до бесконечности. А если провести диагонали первого и второго прямоугольников, то точка *O* их пересечения при-

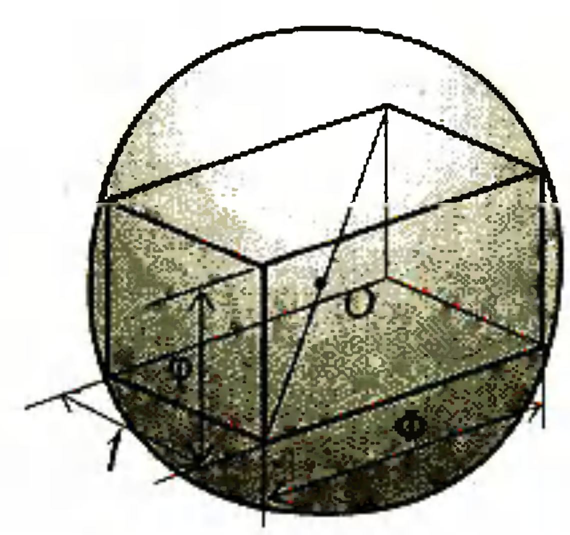


надлежит всем получаемым «золотым прямоугольникам».



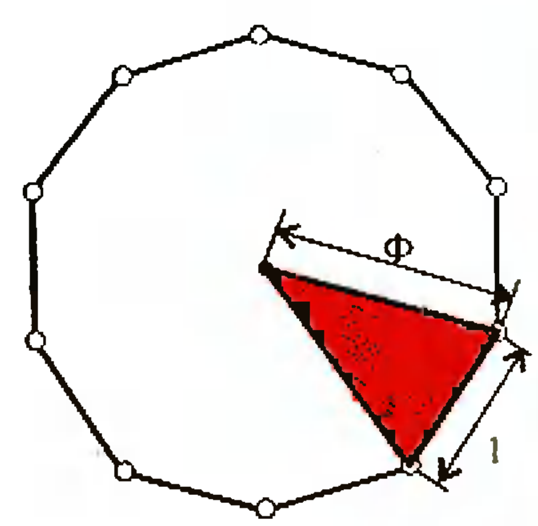
Разумеется, есть и «золотой треугольник». На первом рисунке это треугольник *GEF*. Это — равнобедренный треугольник, у которого отношение длины боковой стороны к длине основания равняется Ф. К числу замечательных свойств этого треугольника, помимо тех, которые вытекают из свойств пентаграммы — пятиугольной звезды, стоит отнести то, что длины биссектрис его углов при основании равны длине самого основания.

Есть и «золотой кубоид» — это прямоугольный параллелепипед с ребрами, имеющими длины Ф, 1 и φ. Его полная поверхность равна 4Ф, а диагональ равна 2 (проверьте). Отсюда следует, что описанная вокруг него сфера имеет радиус 1, а значит, ее поверхность равна 4π. Поэтому отношение поверхности этой



сферы к поверхности «золотого кубоида» равно $\pi : Ф$.

Связь между числами π и Ф пытались найти многие математики прежних времен, но их попытки были обречены на провал — эти числа разной природы: Ф — алгебраическое число, а π — трансцендентное. Однако приближенные соотношения найти удалось. Рассмотрите правильный десятиугольник со стороной 1. Нетрудно заметить, что пара соседних его вершин вместе с центром *O* образует вершины «золотого треугольника», поэтому радиус описанной окружности равен Ф, а ее длина равна $2Ф\pi$. В то же время периметр этого десятиугольника приближенно (с хорошей точностью)



равен длине этой окружности. Отсюда получаем, что $10 \approx 2Ф\pi$, т.е. $\pi \approx 3{,}0902$. Еще более точное соотношение дает формула $\pi \approx 1{,}2Ф^2 = 3{,}1072\ldots$

Число Ф связано и с последовательностью 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., у которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Эта последовательность называется рядом Фибоначчи и возникает во многих практических задачах. Так вот оказывается, что отношение двух соседних членов ряда Фибоначчи в пределе стремится к Ф.

А. Савин

(Начало см. на с. 31)

ляет

$$W_{p2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}+\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}=\frac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}.$$

Закон сохранения полной энергии системы позволяет записать

$$W_{k1}+W_{p1}=W_{k2}+W_{p2},$$

или

$$\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}=3mv^2+\frac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}.$$

Отсюда находим скорость шариков *1* и *2*:

$$v=\frac{q}{2\sqrt{6\pi\varepsilon_0 mL}}$$

и скорость шарика *3*:

$$u=\frac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 mL}}.$$

Задача 3. *Плоский конденсатор с прямоугольными пластинами, подключенный к источнику постоянного напряжения U = 100 В, установлен в вертикальном положении так, что его пластины соприкасаются с диэлектрической жидкостью (рис.2). Расстояние между пластинами d = 0,5 мм много меньше линейных размеров пластин. Определите установившуюся высоту поднятия жидкости между пластинами, если жидкостью является вода с диэлектрической проницаемостью ε = 81 и плотностью ρ = = 10^3 кг/м^3. Капиллярными эффектами пренебречь.*

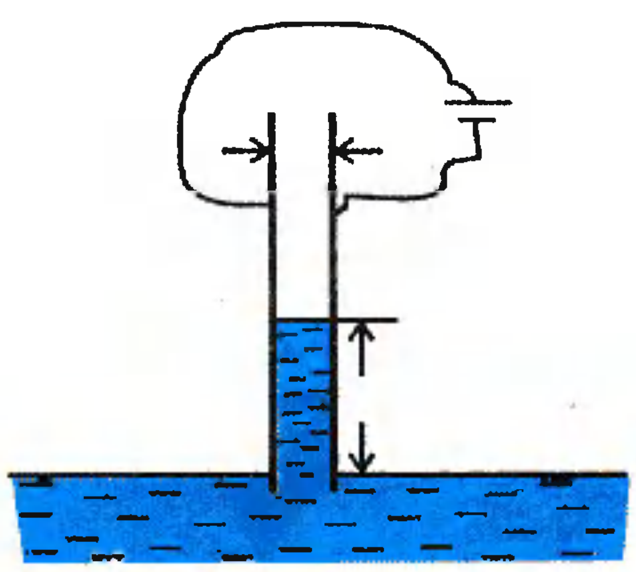


Рис. 2

Наша электромеханическая система включает в себя заряженный конденсатор (при постоянном напряжении U на обкладках), источник постоянного напряжения и диэлектрическую жидкость, находящуюся в поле тяжести Земли. Любая замкнутая система стремится прийти в такое устойчивое состояние, при котором она обладает минимумом энергии. Именно с такой позиции мы и будем исследовать нашу систему.

Пусть в стационарном состоянии высота подъема уровня диэлектрической жидкости между обкладками конденсатора равна z. Найдем полную энергию W нашей системы, которая включает в себя энергию электрического поля конденсатора $W_к$, потенциальную энергию поднятой жидкости $W_ж$ и энергию источника постоянного напряжения $W_и$. Емкость нашего конденсатора равна сумме емкостей конденсатора высотой z, заполненного диэлектрической жидкостью, и пустого конденсатора высотой $(H-z)$:

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 Lz}{d}+\frac{\varepsilon_0 L(H-z)}{d}=\frac{\varepsilon_0 L}{d}\left(H+(\varepsilon-1)z\right),$$

где H — высота пластин конденсатора, L — их длина. Электрическая энергия, запасенная в таком конденсаторе, составляет

$$W_к=\frac{CU^2}{2}=\frac{\varepsilon_0 LU^2\left(H+(\varepsilon-1)z\right)}{2d}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости равна

$$W_ж=\frac{\rho Ldgz^2}{2}$$

(за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принят уровень $z=0$). Теперь разберемся с энергией источника. Обозначим исходную энергию источника через W_0. В тот момент, когда емкость между пластинами конденсатора равна C, на них находится заряд $Q=CU$. Следовательно, наш источник истратил часть своей энергии, равную совершенной работе $A=QU=CU^2$. Очевидно, что оставшаяся энергия источника составляет

$$W_и=W_0-CU^2=W_0-\frac{\varepsilon_0 LU^2}{d}\left(H+(\varepsilon-1)z\right).$$

Тогда полная энергия системы равна

$$W(z)=W_к+W_и+W_ж=W_0-\frac{\varepsilon_0 LU^2}{2d}\left(H+(\varepsilon-1)z\right)+\frac{\rho Ldgz^2}{2}.$$

Продифференцируем это выражение по z и приравняем нулю:

$$\frac{dW(z)}{dz}=-\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)LU^2}{2d}+\rho Ldgz=0.$$

Отсюда следует, что полная энергия нашей электромеханической системы будет минимальна при высоте жидкости

$$z_1=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2d^2\rho g}=1{,}45\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Теперь обсудим приведенное решение. Чего мы добились, найдя минимум потенциальной энергии? Можно сказать, что мы провели исследование данной электромеханической системы на устойчивость и установили, что система имеет одно устойчивое состояние, при котором высота подъема диэлектрической жидкости равна z_1. Но это решение ничего не говорит о том, по какому закону и сколь быстро наша система придет в это устойчивое состояние. Если вы заметили, мы ничего не говорили о возможных потерях энергии. Наше решение никак не связано с потерями и не зависит от диссипации энергии в системе. Величиной энергетических потерь в системе определяется временной закон, по которому система будет подходить к своему устойчивому состоянию, но не параметры этого состояния. В качестве примера рассмотрите идеализированную ситуацию, когда в системе нет диссипации энергии. Попробуйте самостоятельно провести для этого случая энергетическое решение: работа источника идет на изменение энергии конденсатора и работу по подъему жидкости. Вы получите два значения высоты подъема: $z_1^*=0$, $z_2^*=2z_1$. Это означает, что жидкость в конденсаторе будет совершать незатухающие колебания около устойчивого положения равновесия с амплитудой z_1. Но реально потери всегда есть, и если они малы, колебания будут медленно затухать, а уровень жидкости со временем займет свое устойчивое положение $z=z_1$. При больших затуханиях жидкость будет медленно подниматься и стремиться все к тому же значению $z=z_1$.

Задача 4. *На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой m, вдоль которого равномерно распределен заряд Q. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.*

Обозначим радиус кольца через r. Спадание величины индукции магнитного поля от B_0 до нуля может произойти, конечно, и за очень малое время, но реально это всегда будет конечная величина. Пусть в произвольный момент времени (в процессе уменьшения индукции поля) мгновенное значение индукции магнитного поля равно $B(t)$. Изменяющееся во времени маг-

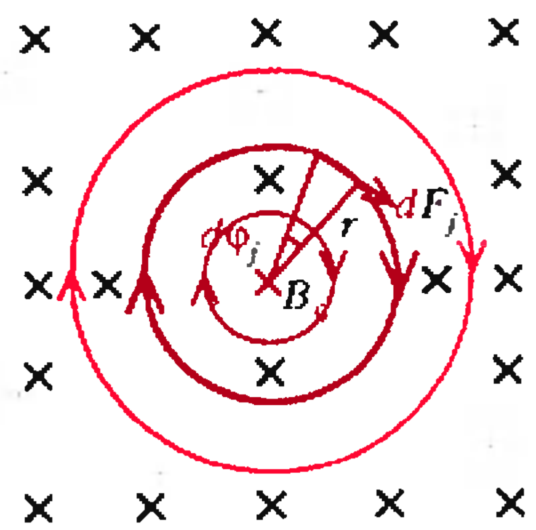


Рис. 3

нитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого на рисунке 3 изображены красными круговыми линиями (для простоты будем рассматривать симметричное распределение магнитного поля относительно нашего кольца). Одна из силовых линий, очевидно, проходит вдоль нашего кольца. Пусть в рассматриваемый момент величина напряженности вихревого электрического поля на этой силовой линии равна $E_B(t)$.

С одной стороны, работа, совершенная вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура кольца, численно равна ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_i = 2\pi r E_B(t).$$

С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в контуре кольца равна

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий наш контур. Приравнивая два выражения для ЭДС индукции, получим

$$E_B(t) = -\frac{r}{2}\frac{dB(t)}{dt}.$$

На каждый небольшой элемент заряженного кольца будет действовать сила, направленная по касательной к окружности радиусом r и равная

$$dF_j = E_B(t)\frac{Q}{2\pi r} r d\varphi_j = -\frac{Q}{4\pi}\frac{dB(t)}{dt} r d\varphi_j.$$

Суммарная сила, действующая в данный момент времени на все кольцо, равна

$$F = \sum_{j=1}^{N} dF_j = -\frac{Qr}{4\pi}\frac{dB(t)}{dt}\sum_{j=1}^{N} d\varphi_j = -\frac{Qr}{2}\frac{dB(t)}{dt}.$$

За малое время Δt импульс силы, подействовавший на кольцо вдоль окружности, приведет к изменению импульса кольца:

$$F\Delta t = m\Delta v,$$

откуда получим

$$\Delta v = \frac{F}{m}\Delta t = -\frac{Qr}{2m}\Delta B$$

(мы учли, что $B'(t)\Delta t = \Delta B$). Малое изменение угловой скорости кольца составляет

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r} = -\frac{Q}{2m}\Delta B.$$

Такое же соотношение связывает изменения угловой скорости и магнитной индукции за все время. Учитывая, что $\Delta\omega = \omega - 0 = \omega$; а $\Delta B = 0 - B_0 = -B_0$, получаем

$$\omega = \frac{QB_0}{2m}.$$

Задача 5. *По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми l, в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой m. Рельсы замкнуты на идеальную катушку индуктивностью L. Вся система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной плоскости рисунка 4. В начальный момент перемычка удерживается внешней силой. Определите максимальное смещение перемычки от начального положения после устранения внешней силы. Омическими потерями пренебречь.*

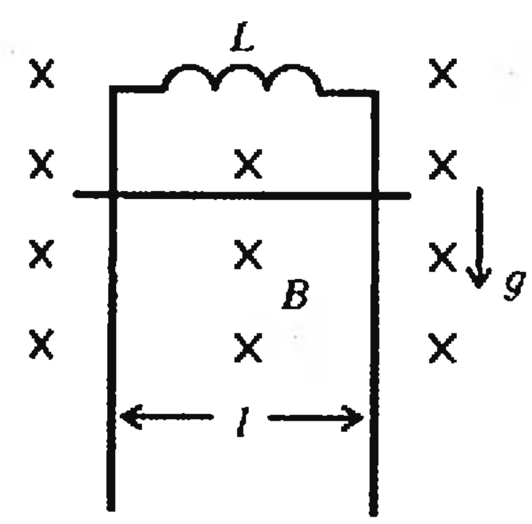


Рис. 4

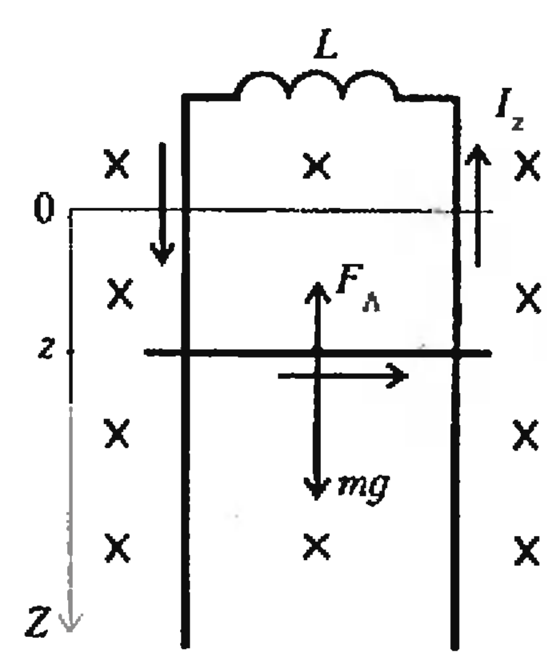


Рис. 5

В системе координат, изображенной на рисунке 5, начальное положение перемычки $z = 0$. Рассмотрим произвольный момент времени, когда перемычка находится на расстоянии z от начала координат и имеет скорость $v_z = \frac{dz}{dt}$. В результате пересечения линий магнитного поля в перемычке наводится ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_i = v_z B l.$$

Возникающий в замкнутом контуре ток I_z вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{dI_z}{dt}.$$

При отсутствии омического сопротивления алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна нулю:

$$Bl\frac{dz}{dt} - L\frac{dI_z}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(Blz - LI_z) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Blz - LI_z = \text{const}.$$

Поскольку при $t = 0$ $z = 0$ и $I_z = 0$, при $t \ge 0$ получаем

$$Blz - LI_z = 0.$$

На перемычку действуют две силы: сила тяжести, равна mg, и сила Ампера со стороны внешнего магнитного поля, равная $F_A = BI_z l$. Запишем уравнение движения перемычки вдоль оси Z:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - BI_z l,$$

или, после подстановки выражения для I_z,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{mL}z = g.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания перемычки относительно уровня $z = (mgL)/(Bl)^2$. В этом положении ускорение перемычки равно нулю и значение z равно амплитуде колебаний. А максимальное смещение перемычки, очевидно, равно двойной амплитуде, поэтому

$$z_{\max} = \frac{2mgL}{B^2l^2}.$$

Этот результат можно получить и

исходя из закона сохранения энергии. Попробуйте это сделать самостоятельно.

Задача 6. *В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием d между ними помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости рисунка 6. Найдите полезную тепловую мощность, которая выделяется на внешней нагрузке в виде резистора сопротивлением R. Пренебрегая возможными потерями при протекании жидкости, определите также КПД такого генератора.*

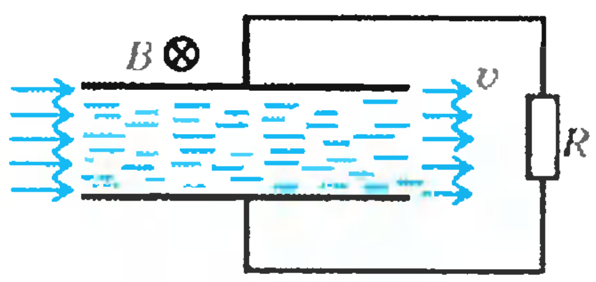


Рис. 6

Рассмотрим вкратце процесс установления стационарного состояния — когда через резистор течет постоянный ток.

Как только проводящая жидкость начинает протекать между обкладками конденсатора, на свободные заряды жидкости со стороны внешнего магнитного поля начинает действовать сила Лоренца. Положительные заряды начинают смещаться к верхней пластине конденсатора, а отрицательные — к нижней. Между пластинами конденсатора возникает разность потенциалов, которая приводит к появлению тока через резистор R. Одновременно, возникшее электрическое поле начинает препятствовать движению свободных зарядов жидкости к пластинам. В результате через некоторое время устанавливается стационарное состояние: заряд, поступающий из жидкости на каждую пластину в единицу времени, равен силе тока, протекающего через резистор. Другими словами, в цепи резистора начинает течь постоянный ток. Обозначим его через I.

Теперь выясним, чему равна электродвижущая сила, которая поддерживает ток в цепи. По определению, ЭДС равна напряжению на пластинах конденсатора при разомкнутой внешней цепи. Условие отсутствия тока внутри конденсатора имеет вид $E = vB$, где E — напряженность электрического поля. Разность потенциалов между пластинами составляет $\mathcal{E} = Ed = vBd$. Это и

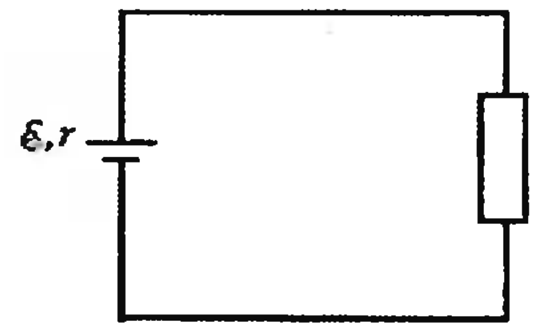


Рис. 7

есть величина электродвижущей силы, действующей в замкнутой цепи. Можно нарисовать эквивалентную электрическую схему — см. рисунок 7, где r — внутреннее сопротивление источника: $r = \rho d/S$.

Очевидно, что сила тока в такой цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{vBd}{R+\rho d/S},$$

а мощность, выделяемая на резисторе, составляет

$$P_R = I^2R = \frac{(vBd)^2R}{(R+\rho d/S)^2} = \frac{(vBd)^2}{R(1+\rho d/(SR))^2}.$$

Для расчета КПД генератора необходимо найти мощность внешних сил, приводящих в действие генератор. Понятно, что работа внешних сил затрачивается на перемещение жидкости между пластинами конденсатора. Поскольку через жидкость течет ток I, на носители тока, а следовательно и на жидкость между пластинами, действует сила Ампера $F_A = BId$, которая направлена против движения жидкости. Для равномерного протекания жидкости на нее должна действовать внешняя сила, равная силе Ампера и направленная вдоль скорости течения. Мощность, развиваемая этой силой, равна

$$P = F_Av = BIdv = \frac{(vBd)^2}{R(1+\rho d/(SR))},$$

а КПД генератора —

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{1}{1+\rho d/(SR)}.$$

Как видно, КПД генератора определяется отношением омических сопротивлений жидкости и резистора. При стремлении этого отношения к нулю КПД стремится к единице.

Упражнения

1. Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом q и массой m, связаны двумя нерастяжимыми нитями длиной l каждая. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Какую минимальную скорость необходимо сообщить центральному шарику вдоль оси, перпендикулярной нитям, чтобы при дальнейшем движении шарики смогли образовать равносторонний треугольник? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.

2. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает через плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ (рис.8). Определите

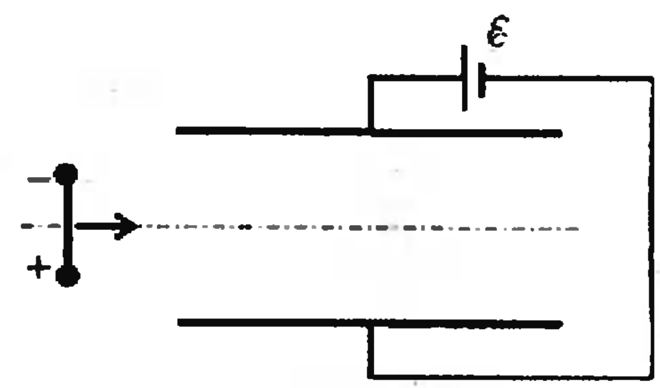


Рис. 8

скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m.

3. На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое проволочное кольцо радиусом r. Сопротивление кольца R. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Индукция магнитного поля стала уменьшаться со временем по закону $B(t) = B_0 - At$, где A — константа. Чему равна максимальная сила натяжения проволоки кольца, обусловленная взаимодействием тока в кольце с внешним магнитным полем? Самоиндукцией кольца пренебречь.

4. По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми l, в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой m. Рельсы замкнуты катушкой индуктивностью L и находятся в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рисунка 4. В начальный момент времени контакт удерживается внешней силой, а затем внешняя сила убирается и контакт начинает движение вниз с нулевой начальной скоростью. Определите величину индукции внешнего магнитного поля, если известно, что максимальная скорость, которую приобретает контакт, равна v_0. Омическими потерями пренебречь.

Варианты вступительных экзаменов 1997 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\log_{x^2}|3x+1|<\frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x.$$

3. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей внутри треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до сторон AC и BC равны 6 и 24 соответственно. Найдите расстояние от точки K до стороны AB.

4. Графику функции $y=-x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=-2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку $(0; -2)$, а другая — через точку $(0; -6)$. Найдите значения a, b и c.

5. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{r}{2}$ так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найдите радиус основания цилиндра.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_2(4\cos x+3)\log_6(4\cos x+3)=$$
$$=\log_2(4\cos x+3)+\log_6(4\cos x+3).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3}<-1.$$

3. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки D и E соответственно так, что CD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ACD, $EC=ED=\frac{4}{9}$, $BC=1$. Найдите CD и площадь треугольника ABC.

4. К графику функции $y=-\frac{x^2}{12}+x-\frac{16}{3}$ проведена касательная, пересекающая график функции $y=3|x+6|-\frac{7}{3}$ в точках A и B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках A, B и $C\left(-6; -\frac{7}{3}\right)$, если $\angle CAB=2\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\angle CBA$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AB угол, равный $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Найдите площадь сечения куба плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и граней $ABCD$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1.

Вариант 3

1. Найдите все действительные корни уравнения

$$\left|2\sqrt{x}+1-x\right|+\left|x-2\sqrt{x}+2\right|=7.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}6\sin x\cos y+2\cos x\sin y=-3,\\ 5\sin x\cos y-3\cos x\sin y=1.\end{cases}$$

3. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найдите радиус окружности.

4. Пусть M — множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $3x$, $2y$ и $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M.

Фигура Φ состоит из точек множества M таких, что неравенство $t^2+2t(x-2)+7-y>0$ выполняется при всех значениях параметра t. Найдите площадь фигуры Φ.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB=BD=AD=a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите длину ребра CD, $\angle CAD$ и угол между ребром BD и гранью ACD.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Пуля летит горизонтально со скоростью v_0, пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола коробку и вылетает в том же направлении с втрое меньшей скоростью. Масса коробки в пять раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ. 1) Найдите скорость коробки сразу после вылета из нее пули. 2) На какое расстояние передвинется коробка?

2. Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре 110 °С. Вода занимает при этом 0,1% объема цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объема вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу $A=177$ Дж, а объем, который он занимал, увеличился на $\Delta V=1{,}25$ л. Найдите давление, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?

3. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных батареи ЭДС $\mathcal{E}$, резистора сопротивлением R и конденсатора переменной емкости, начальное значение которой равно C_0. Через некоторое время после замыкания ключа в цепи течет ток I_0. Начиная с этого момента емкость конденсатора изменяется таким образом, что ток в цепи остается постоянным и равным I_0. 1) Определите ток в цепи сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость емкости конденсатора от времени. Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.

4. Показатель преломления некоторой плоской среды имеет такую зависимость от координаты y (рис.1): при

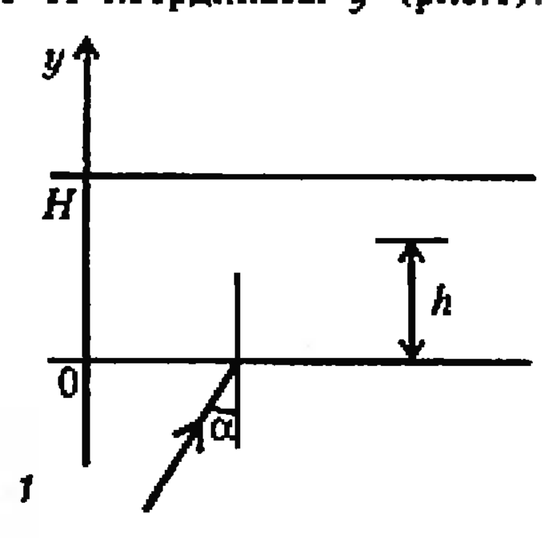


Рис. 1

$y < 0$ $n = n_0$ ($n_0 = 1{,}4$); при $0 < y < H$ $n(y) = n_0 - ky$, где k — константа ($k = 0{,}2$ м$^{-1}$, $H = 2$ м); при $y > H$ $n = 1$. На плоскость $y = 0$ падает узкий пучок света под углом падения $\alpha = 60°$. На какую максимальную глубину h сможет проникнуть световой луч?

5. Положительно заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. В некоторый момент времени скорость частицы перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и равна v_0. Чему будет равна скорость этой частицы в те моменты, когда вектор ее скорости будет составлять 180° с вектором $\vec{v}_0$, при условии, что $E = v_0 B$? Поле тяжести не учитывать.

Вариант 2

1. Два камня брошены из одной точки с одинаковыми скоростями: один — вертикально вверх, другой — вертикально вниз. Они упали на землю с интервалом времени τ. С какой скоростью были брошены камни? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа CO_2, масса которого, по некоторым оценкам, составляет $m = 6 \cdot 10^{16}$ т. Чему равна плотность углекислого газа вблизи поверхности Венеры, если его температура $T = 800$ К? Радиус Венеры $R_В = 6300$ км, а ускорение свободного падения $g_В = 8{,}2$ м/с^2. Толщина атмосферы Венеры много меньше радиуса планеты.

3. В электрической схеме, показанной на рисунке 2, в начальный момент

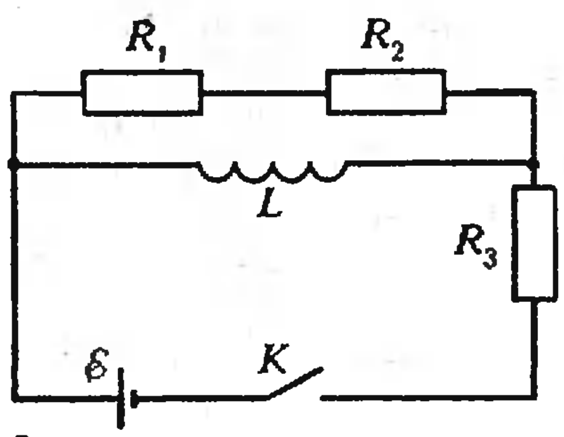


Рис. 2

ключ K замкнут. После размыкания ключа на резисторе сопротивлением R_1 выделяется количество теплоты Q_1. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R_2? Чему равна ЭДС батареи? Сопротивления R_1, R_2, R_3 и индуктивность катушки L считать заданными.

4. Тонкостенный непроводящий цилиндр с гладкой внутренней поверхностью неподвижно лежит на горизонтально расположенной непроводящей пластине $П$ (рис.3). Размеры пластины (в горизонтальной плоскости) мно-

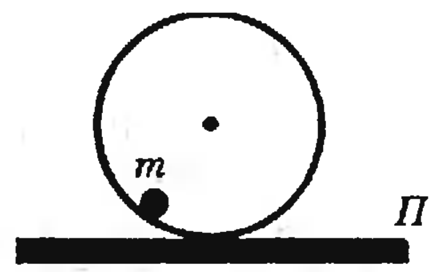


Рис. 3

го больше радиуса цилиндра. Известно, что отношение периода колебаний маленького отрицательно заряженного шарика внутри цилиндра при некоторой положительной плотности поверхностных зарядов σ_x пластины к периоду колебаний при $\sigma = 0$ равно α. Определите σ_x, считая заданными α, q — заряд шарика, m — его массу и g — ускорение свободного падения.

5. Точечный источник света S расположен на расстоянии $a = 40$ см от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Оптическая сила линзы $D = 5$ дптр. При повороте линзы на некоторый угол α (рис.4) относительно оси, перпендикулярной плоскости

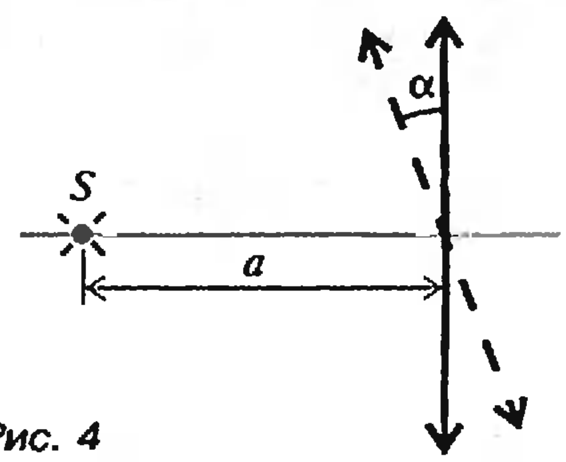


Рис. 4

рисунка и проходящей через оптический центр линзы, изображение источника сместилось на $\Delta l = 10$ см. Найдите угол поворота линзы α.

Вариант 3

1. Два моля гелия при постоянном давлении $p_0 = 10^6$ Па охлаждаются на $\Delta T = 1$ К так, что относительное уменьшение объема газа $\Delta V/V_0$ составило $\alpha = 0{,}25\%$. На сколько литров уменьшился объем газа? Найдите также начальную температуру газа.

2. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых H и $3H$ (рис.5). На левой вершине горки находится шайба массой m. Масса горки $5m$, ее поверхность гладкая. От незначительного толчка вправо шайба при-

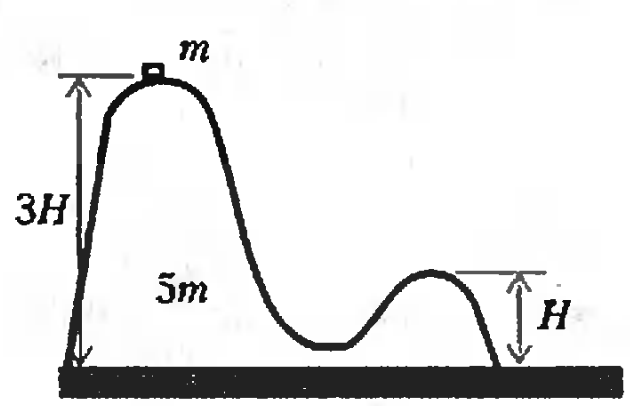


Рис. 5

ходит в движение. Найдите скорость шайбы на правой вершине, если: 1) горка закреплена на столе; 2) горка не закреплена. Считать, что при движении шайба не отрывается от поверхности горки, а поступательно движущаяся горка не отрывается от стола.

3. В лунку размером $10 \times 10 \times 10$ см, целиком заполненную водой, опускают цилиндрическое тело (ось цилиндра вертикальна). В результате часть воды из лунки выливается, а тело начинает плавать в ней (рис.6). После этого из

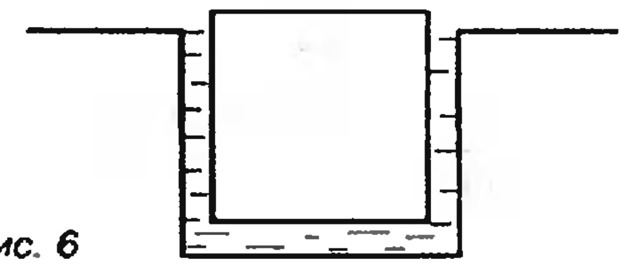


Рис. 6

лунки отлили еще $m = 250$ г воды, так что цилиндр стал плавать, касаясь дна лунки. Какая масса воды осталась в лунке и чему равна плотность материала цилиндра? Диаметр цилиндра d немного меньше 10 см, высота цилиндра равна его диаметру.

4. На двух длинных, гладких параллельных и горизонтально расположенных проводящих штангах лежит проводящая перемычка $П$ массой M (рис.7). Расстояние между штангами l. Через резистор сопротивлением R и

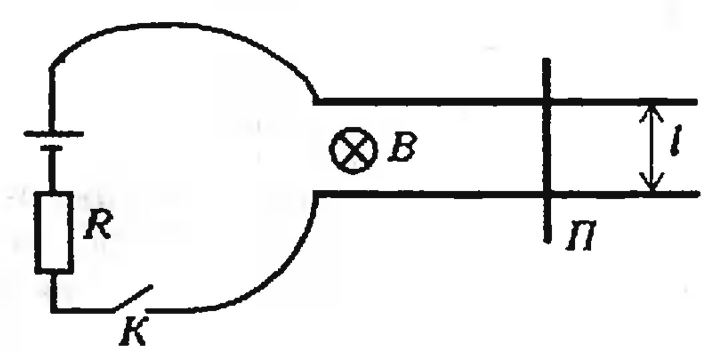


Рис. 7

разомкнутый ключ K к штангам подключена батарея с некоторой постоянной ЭДС. Штанги расположены в области однородного магнитного поля с вертикально направленной индукцией B. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, сопротивлением штанг и перемычки, определите ускорение перемычки сразу после замыкания ключа, если известно, что после замыкания максимальная установившаяся скорость, которую приобретает перемычка, равна v_0.

5. При некотором максимальном значении задерживающей разности потенциалов на вакуумном фотоэлементе фототок с поверхности катода, освещаемого светом с длиной волны λ_0, прекращается. Если изменить длину волны света в $\alpha = 2$ раза, то для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в $\beta = 3$ раза. Определите длину волны λ_0, если известно, что работа выхода материала катода $A = 1{,}89$ эВ, а постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили В.Трушин, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты автоматики и вычислительной техники и экономико-математический)

1. Автомобиль выехал из пункта A в пункт B и ехал с постоянной скоростью. Проехав $3/4$ пути, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч. Когда автомобиль прибыл в пункт B, оказалось, что его средняя скорость движения равнялась 64 км/ч. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x = -1.$$

3. Решите уравнение

$$16 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot 2^x = 42.$$

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC такой, что $AB = AC = 8\sqrt{5}$, $BC = 16$. Высота пирамиды проходит через вершину C. Сфера, описанная вокруг пирамиды (т.е. проходящая через все ее вершины), имеет радиус, равный 26. Найдите объем пирамиды.

5. Докажите, что $a = 0$ обладает тем свойством, что каждое решение системы

$$\begin{cases} y \ge x^2 + a, \\ x \ge y^2 + a \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x^2 + y^2 \le 8$, и найдите все значения a, обладающие этим свойством.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$\frac{2a - x}{x + a - 3} + \frac{3x - 2a}{x - a + 1} = 4.$$

2. Решите уравнение

$$2\log_4 x + 5\log_x 4 = 11.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = -2\sqrt{2}.$$

4. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, у которой основания равны 6 и 8, а боковые стороны равны $\sqrt{2}$. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 13. Найдите объем пирамиды.

5. При $a = 5$ решите уравнение

$$2\sin x \cos 2x + 7\sin x = a$$

и определите все значения a, при которых это уравнение имеет решение.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m_1 = 2{,}0$ кг летит горизонтально со скоростью $v = 8$ м/с и налетает на другое тело массой $m_2 = 0{,}9$ кг, находящееся на горизонтальной поверхности и прикрепленное к горизонтально расположенной пружине, упирающейся в стенку. Коэффициент трения лежащего тела о поверхность $\mu = 0{,}3$. При ударе пружина деформировалась на $\Delta l = 0{,}2$ м. Считая удар абсолютно неупругим, определите жесткость пружины. Массой пружины пренебречь.

2. Определите силу натяжения нити, связывающей два шарика объемом $V = 10$ см^3 каждый, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду. Нижний шарик в три раза тяжелее верхнего. Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.

3. В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжелый поршень. Массы газа и его температуры над поршнем и под поршнем одинаковы. Если внутренний объем нижней части сосуда обозначить через V_0, то внутренний объем верхней части сосуда равен $3V_0$. Каким будет отношение внутренних объемов верхней и нижней частей сосуда, если температуру газа увеличить в два раза?

4. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S = 10$ см^2 находится азот. Масса азота $m = 14$ г, его температура $T_1 = 300$ К. К поршню с помощью двух блоков на невесомой нерастяжимой нити подвешен груз массой $m_0 = 5$ кг (рис.1). Газ в цилиндре нагревают до температуры $T_2 = 310$ К. На какую высоту опустится груз? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, молярная масса азота $M = 0{,}028$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

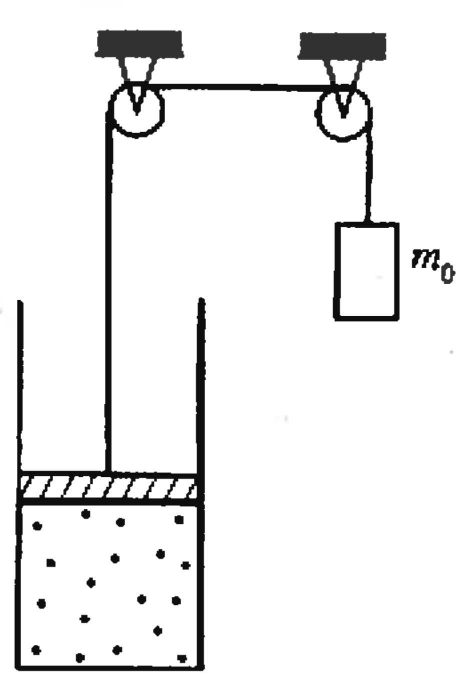


Рис. 1

5. Определите разность потенциалов между точками A и B в цепи, изображенной на рисунке 2, если $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\mathcal{E} = 12$ В, $r = 2$ Ом.

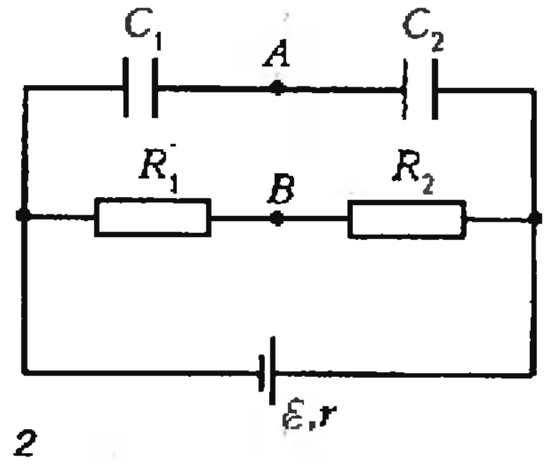


Рис. 2

6. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией B со скоростью, равной v и направленной под углом φ к линиям магнитной индукции. Ширина области с полем l. Найдите модуль изменения импульса электрона за время пролета через магнитное поле.

7. Контур образован двумя параллельными проводниками, замыкающим их соленоидом индуктивностью L и проводящим стержнем массой m, который может без трения скользить по проводникам. Проводники расположены в горизонтальной плоскости в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B. Расстояние между проводниками l. В момент $t = 0$ стержню сообщили скорость, равную v_0 и направленную вдоль проводников. Найдите закон его движения. Сопротивление контура пренебрежимо мало.

8. Колебательный контур состоит из двух одинаковых конденсаторов емкостью C каждый и катушки индуктивностью L, соединенных последовательно. В некоторый момент времени один из конденсаторов получает заряд Q, а второй остается незаряженным. Найдите амплитуду колебаний тока в цепи.

9. Свет от источника по пути к экрану проходит через стеклянную прямоугольную призму длиной $l = 1$ м. На сколько быстрее свет дойдет до экрана, если призму привести в движение в сторону экрана со скоростью $v = 1$ м/с? Показатель преломления стекла $n = 1{,}4$.

10. Электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}3$ мкм падает на фотоэлемент, находящийся в режиме насыщения. Известно, что при падающем на фотокатод световом потоке мощностью $P = 1$ Вт сила тока насыщения равна $I = 4{,}8\cdot 10^{-3}$ А. Найдите выход фотоэлектронов, т.е. число фотоэлектронов на каждый падающий фотон.

Публикацию подготовили
О.Попов, В.Тонян, П.Эминов

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Имеются два слитка, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток массой 150 кг содержит 40% олова, а второй массой 250 кг — 26% меди. Процентное содержание цинка в обоих слитках одинаково. Сплавив первый и второй слитки, получили сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в полученном сплаве?

2. Решите уравнение
$$x^{\lg x} = 1000x^2.$$

3. Решите уравнение
$$\log_3 \cos x = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{3}\sin x - 1}.$$

4. Отрезок длиной a разделите на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на полученных отрезках как на сторонах, была наименьшей.

5. Боковое ребро SC четырехугольной пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AD = a$, $AB = a\sqrt{3}$, перпендикулярно плоскости основания, а боковое ребро SA образует с плоскостью основания угол в 30°. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ BD основания параллельно SA.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 мин совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый рабочий в отдельности, если известно что второму на это понадобится на 1 ч больше, чем первому?

2. Решите уравнение
$$x^{4-\log_3 x} = 27.$$

3. Решите уравнение
$$\log_2\left(\sqrt{3}\cos x\right) = \log_2(1 + \sin x).$$

4. В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани равна a. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы ее объем был наибольшим?

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания. Точки D и E — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Найдите величину угла наклона плоскости, проходящей через точку E перпендикулярно прямой SD, к плоскости основания пирамиды, если $AC = BC = \sqrt{2}$, $SC = 1$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна $2\sqrt{3}$. Вычислите объем пирамиды.

2. Упростите выражение
$$\left(\frac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}-1} + \frac{a^{1/2}-1}{a^{1/2}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3}.$$

3. Решите неравенство
$$\frac{3-x}{x-4} < \frac{2}{3}.$$

4. Решите уравнение
$$2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4.$$

5. Решите уравнение
$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$. Двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объем пирамиды.

2. Упростите выражение
$$\frac{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^2}}.$$

3. Решите неравенство
$$\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 2} < 0.$$

4. Решите уравнение
$$\log_4(x + 12)\log_x 2 = 1.$$

5. Решите уравнение
$$\sin(x - 60°) = \cos(x + 30°).$$

Вариант 5

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

2. Упростите выражение
$$\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right).$$

3. Решите неравенство
$$\frac{x-1}{x+2} < 2.$$

4. Решите уравнение
$$\log_6(x-5) + \log_6(x+11) + 4\log_4\frac{1}{2} = 0.$$

5. Решите уравнение
$$\sin 3x - \cos 5x = 0.$$

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Изобразите график функции
$$y = 2^{|\log_2 x|}.$$

2. Изобразите график функции
$$y = |\sin x| \operatorname{ctg} x.$$

3. Изобразите график функции
$$y = x^2 + 4|x| + 4.$$

4. При каких значениях параметра k уравнение
$$4x^2 - 2kx + k + 3 = 0$$
не имеет решений?

5. Решите уравнение
$$3^{x+1} + 3^{1-x} = 10.$$

6. Решите уравнение
$$|x-1| + |x-2| = 1.$$

7. Решите уравнение
$$2^{3\cos 2x} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

8. Решите неравенство
$$2^{\frac{3}{x-1}} \geq \sqrt{2}.$$

9. Решите неравенство
$$\log_3 x < \log_3(5 - x).$$

10. Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} 2x, \\ y = 5x - 1? \end{cases}$$

11. На какую цифру оканчивается число 1997^{1000}?

12. Вставьте цифры на место звездочек в записи 1*2* четырехзначного числа так, чтобы оно делилось на 45.

13. Найдите все значения параметра a, при которых сумма квадратов двух различных корней уравнения

$$ax^2 + 4x - 3 = 0$$

больше 10.

14. Вычислите

$$2\lg 5 - \lg\left(0{,}5 \sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

15. Найдите угол между диагональю куба и плоскостью его грани.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. С вертолета, поднимающегося вертикально вверх с постоянной скоростью 1,5 м/с, сбрасывают небольшой мешок с почтой. Какими будут скорость мешка и пройденный им путь через 2 с? На каком расстоянии от вертолета окажется мешок к концу второй секунды? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Два связанных между собой бруска массами 0,6 кг и 0,3 кг движутся по горизонтальной плоскости под действием силы 4,5 Н, приложенной ко второму бруску. Каково ускорение брусков? Какова сила натяжения связывающей их нити? Коэффициент трения 0,05.

3. Какой массы груз нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь льдины 2 $м^2$, толщина льдины 15 см. Плотность льда 0,9 $г/см^3$.

4. Какова средняя квадратичная скорость движения молекул гелия, если, имея массу 4 кг, он занимает объем 5 $м^3$ при давлении 200 кПа?

5. В сосуде объемом $4 \cdot 10^{-3}$ $м^3$ находится 0,012 кг газа при температуре 177 °С. При какой температуре плотность этого газа будет равна $6 \cdot 10^{-6}$ $кг/см^3$, если давление остается неизменным?

6. Подошва стального утюга массой 700 г в процессе работы нагрелась от 20 °С до 200 °С. Сколько времени ушло на нагревание утюга, если его мощность 750 Вт и КПД 80%?

7. В латунный калориметр массой 100 г, содержащий 250 г воды при 10 °С, впускают пар при 100 °С. Какое количество пара следует впустить, чтобы температура воды в калориметре поднялась до 50 °С? Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг · К), удельная теплоемкость латуни 0,4 кДж/(кг · К), удельная теплота конденсации пара $22{,}6 \cdot 10^2$ кДж/кг.

8. Двум соприкасающимся шарикам массой 0,3 г каждый, подвешенным на нитях длиной 100 см, сообщили одинаковые заряды. После этого шарики разошлись на расстояние 5 см друг от друга. Каков заряд каждого шарика?

9. Какую работу нужно совершить, чтобы заряды $5 \cdot 10^{-9}$ Кл и $3 \cdot 10^{-9}$ Кл, находящиеся на расстоянии 20 см, сблизить до 10 см?

10. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с вакуумом падает луч света. Угол падения равен 30°. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления жидкости.

Публикацию подготовили Г.Брайчев, А.Жмулева, Б.Кукушкин, Н.Пурышева

ОЛИМПИАДЫ

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Задачи районного тура

1 (6 кл.). Закрасьте несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная — ровно с одной закрашенной.

Ю.Базлов

2 (6 кл.). На прямой расположены пять точек — A, B, C, D, E (именно в таком порядке). Известно, что $AB = 19$ см, $CE = 97$ см, $AC = BD$. Найдите длину отрезка DE.

Р.Семизаров

3 (6 кл.). На семи карточках написаны числа от 1 до 7. Двум мудрецам дали по три карточки, а одну спрятали. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Сумма твоих чисел нечетна». Какие карточки у первого мудреца?

С.Иванов

4 (6 кл.). Юра задумал натуральное число, умножил его на 13 и зачеркнул последнюю цифру результата. Полученное число он умножил на 7 и опять зачеркнул последнюю цифру результата. Получилось число 21. Какое число задумал Юра?

К.Кохась

5 (8 кл.). В четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые AL и CK пересекаются в точке P, прямые AM и CN — в точке Q. Оказалось, что $APCQ$ — параллелограмм. Докажите, что $ABCD$ — тоже параллелограмм.

А.Храбров

6 (9 кл.). Можно ли в клетках квадрата 6×6 расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел любого прямоугольника 1×4 делилась на 3, а сумма всех чисел не делилась на 3?

7 (9 кл.). Даны три квадратных трехчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих трехчленов имеет общий корень с суммой двух других трехчленов. Докажите, что сумма этих трехчленов равна нулю.

С.Берлов

8. Функция f определена на всей вещественной оси и при всех x удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{2f(x)} - \sqrt{2f(x) - f(2x)} \ge 2.$$

а)(10 кл.) Докажите неравенство $f(x) \ge 4$.

б)(11 кл.) При каком наибольшем a можно утверждать, что при всех x выполняется неравенство $f(x) \ge a$?

А.Храбров

Задачи городского тура

9 (6 кл.). В четырехзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5, в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число?

Ю.Базлов

10. На поле брани встретились армии толстых и тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких. Затем каждый уцелевший тонкий выстрелил в одного из толстых.

а)(6 кл.) Докажите, что выжило не менее 1000 солдат.

б)(7 кл.) После этого каждый уцелевший толстый еще раз выстрелил в одного из тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

С.Берлов

11 (7 кл). Клетчатый прямоугольник, обе стороны которого больше 1, разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Пусть A — количество квадратов 2×2, состоящих из двух доминошек, B — количество квадратов 2×2, состоящих из клеток четырех разных доминошек. Докажите, что $A > B$.

Д.Карпов, С.Иванов

12 (8 кл.). Докажите, что уравнение

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = z^2 + 1$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

А.Голованов

13 (9 кл.). Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили произведение 1. Найдите эти корни.

С.Берлов

14 (9 кл.). Какое наименьшее число клеток можно закрасить в квадрате 100×100, чтобы в любом прямоугольнике 1×2 была хотя бы одна закрашенная клетка, а в любом прямоугольнике 1×6 имелись бы соседние закрашенные клетки?

А.Дюбина

15. а)(9 кл.) В городе Незнакомске $3n$ жителей, причем любые два жителя имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать n человек таких, что каждый из остальных знаком хотя бы с одним человеком из этих n.

б)(10 кл.) В городе Незнакомске миллион жителей, причем любые два из них имеют общего знакомого среди остальных. Докажите, что можно выбрать 5000 жителей города так, чтобы любой из оставшихся имел хотя бы одного знакомого среди выбранных.

С.Берлов, С.Иванов

16 (10 кл.). Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках X и Y. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BD. Докажите, что точки C, X, Y и A' лежат на одной окружности.

С.Берлов

Задачи отборочного тура

17 (9 кл.). Докажите, что у всякого натурального числа количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 1 или 9, не меньше, чем количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 3 или 7.

А.Храбров

18 (9 кл.). Можно ли разрезать (по клеточкам) квадрат 1997×1997 на квадраты со сторонами больше 30 клеток?

Д.Карпов

19 (10 кл.). Клетчатый квадрат 100×100 сложили несколько раз по линиям сетки и сделали два прямолинейных разреза, также идущих по линиям сетки. На какое наибольшее число частей мог быть разрезан квадрат таким способом?

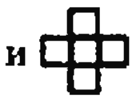
А.Дюбина

20 (10 кл.). На плоскости расположены $2n + 1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n+1)(2n+1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

С.Иванов

21 (10 кл.). 360 точек разбивают окружность на равные дуги. Проведено 180 непересекающихся хорд с вершинами в этих точках. Рассмотрим еще 180 хорд, получающихся из данных поворотом окружности на угол α. Докажите, что эти 360 хорд образуют замкнутую ломаную при $\alpha = 1°$ и не могут образовывать замкнутую ломаную при $\alpha = 38°$.

Д.Карпов

22 (11 кл.). Можно ли доску 75×75 разбить на фигурки вида  и  ?

К.Кохась

23 (11 кл.). Докажите, что при $x \ge 2$, $y \ge 2$, $z \ge 2$

$$\left(y^3 + x\right)\left(z^3 + y\right)\left(x^3 + z\right) \ge 125xyz.$$

К.Кохась, А.Пастор

24 (11 кл.). Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. На окружности S_1 выбрана точка Q. Прямые QA и QB пересекают окружность S_2 в точках C и D, касательные к S_1 в точках A и B пересекаются в точке P. Точка Q расположена вне S_2, точки C и D — вне S_1. Докажите, что прямая QP проходит через середину отрезка CD.

С.Берлов

25 (11 кл.). На листе клетчатой бумаги рисуют выпуклый 50-угольник с вершинами в узлах сетки. Какое наибольшее число диагоналей этого 50-угольника может идти по линиям сетки?

А.Голованов

Публикацию подготовили
С.Берлов, С.Иванов, К.Кохась

IV Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Заключительный этап очередной олимпиады школьников по астрономии и космической физике прошел с 7 по 12 апреля 1997 года в городе Троицке Московской области на базе Фонда «Байтик» и Центра новых педагогических технологий. Научное и идейное руководство олимпиадой осуществляло, как и в прошлые годы, Астрономическое общество.

Характер и содержание олимпиадных задач были направлены на выявление наиболее талантливых ребят, увлекающихся астрономией и космическими аспектами физики, повышение интереса к современным аспектам развития астрономической науки. Несколько задач были посвящены астрономическим явлениям непосредственно этого года: комете Хейла—Боппа и солнечному затмению в Сибири 9 марта.

В заключительном туре олимпиады принял участие 91 школьник из 28 регионов России (к сожалению, не все области смогли прислать свои команды). Как и в 1996 году, участники олимпиады были разделены на три возрастные группы: 8 — 9 классы (в эту группу были включены и 4 ученика 7 класса), 10 класс и 11 класс. Каждый регион мог направить на олимпиаду четырех участников по 8 — 9 классам, двух десятиклассников и двух одиннадцатиклассников, а также (дополнительно) победителей Российской и Международной олимпиад 1996 года (эти нормы сохраняются и на 1998 год). Заметим, кстати, что (согласно Положению об олимпиаде) города и районы России, проводящие у себя заключительный этап олимпиады, по согласованию с Координационным советом могут представлять свою область на заключительном этапе, если областные олимпиады в этой области не проводятся.

Как обычно, олимпиада включала в себя теоретический и практический туры. На теоретическом туре школьникам было предложено по 6 негромоздких задач, а задание практического тура представляло собой одну большую проблему. На решение заданий каждого тура отводилось 4 часа. Каждая задача первого тура оценивалась из 10 баллов, второго — из 30.

Работу жюри олимпиады возглавил профессор астрономического отделения МГУ А.С.Расторгуев, в состав жюри вошли представители Троицка, Москвы, Черноголовки, Рязани, Рязанской области и Кабардино-Балкарии. Работы теоретического тура внимательно проверялись не менее двух раз. Для достижения максимального единообразия критериев проверки одну и ту же задачу у всех участников проверяли одни и те же члены жюри. При проверке работ практического тура использовался другой метод. Каждую работу проверяли независимо три члена жюри, каждый из которых мог поставить до 10 баллов, а затем баллы суммировались. Правильно решенная задача оценивалась полным количеством баллов независимо от способа решения. А вот что касается неполных решений, то оценивался не только «процент решения», но и способ: чем меньше действий нужно было сделать, чтобы довести до конца предлагавшееся решение, тем больше ставилось баллов — ведь порой даже проще начать решать задачу с нуля, чем идти до конца по очень длинному пути (т.е. не доведенные до конца громоздкие решения не поощрялись). Но вообще жюри было приятно удивлено — несмотря на то, что сложность задач на теоретическом туре олимпиады растет от года к году, все большее число участников успешно справляется с ними.

Задачи теоретического тура

8 — 9 КЛАССЫ

1. Две звезды имеют одно и то же прямое восхождение и разные склонения. На какой географической широте они восходят и заходят одновременно?

2. Эксцентриситет эллиптической орбиты Плутона составляет $e = 0{,}249$ (в отличие от большинства других планет, для которых — кроме Меркурия — эксцентриситет не превышает 0,1 и орбиты являются практически круговыми). Во сколько раз афелий Плутона больше его перигелия? Нарисуйте в удобном масштабе орбиты Плутона и планет-гигантов, а также положение Солнца по отношению к ним.

3. Почему на Земле или любой другой планете происходит смена дня и ночи? Конечно, скажете вы, потому что она вращается вокруг оси. Но это далеко не полный ответ. Подумайте: может ли так быть, что планета вращается вокруг оси, а смены дня и ночи не происходит; может ли так быть, что планета не вращается вокруг оси, а смена дня и ночи происходит. Если хотя бы один раз вы скажете «да», то вам придется поискать новый, более полный ответ на вопрос, при каких условиях нигде на планете не происходит смена дня и ночи.

4. Во время полного солнечного затмения 9 марта 1997 года в Читинской области видимые угловые радиусы Луны и Солнца составляли $\rho_Л = 16'41''$ и $\rho_С = 16'07''$ соответственно. Используя эти данные, оцените, какое максимальное время можно было наблюдать полное солнечное затмение. Как следует выбирать точку (или местность) наблюдений, чтобы в этом месте затмение наблюдалось наиболее продолжительное время? Эффекты, связанные с суточным вращением Земли, не учитывайте.

5 — 6. Вам даны некоторые сведения об орбите и эфемеридах кометы Хейла—Боппа (далее следовал файл из

На закрытии олимпиады каждому призеру был вручен диплом и ценный подарок, а 23 призерам по 8 — 10 классам еще и главный приз олимпиады — приглашение на IV Осеннюю астрономическую школу в Специальную астрофизическую обсерваторию РАН (близ станицы Зеленчукская Ставропольского края), в рамках которой должна пройти очередная Международная олимпиада Астрономического общества.

В заключительный день олимпиады — 12 апреля — в Московском дворце детского и юношеского творчества состоялась традиционная научно-практическая конференция, посвященная Дню Космонавтики. А в дни, непосредственно следовавшие за олимпиадой (13 — 15 апреля), на базе Подмосковного филиала МГУ (п.Черноголовка Московской обл.) прошли выездные вступительные экзамены на естественные факультеты МГУ. Видимо, эта практика будет продолжена и в дальнейшем.

Все ваши вопросы, замечания и предложения (по комплекту задач, другим вопросам, а также интересные задачи, условия которых вы хотели бы видеть в олимпиадах будущего) просим сообщить автору по электронной почте: gavrilov@issp.ac.ru или почтовому адресу: 142432 п.Черноголовка Московской обл., Институтский пр., 15, ИФТТ РАН.

Ниже приводятся условия задач теоретического и практического туров, а также список призеров олимпиады.

сети Internet), а также географические координаты города Троицка ($\varphi = 55°30'$ с.ш., $\lambda = 35°15'$ в.д.).

5) Определите, в течение какого периода времени комета является незаходящей в городе Троицке.

6) Когда (дата, время) комета поднялась (поднимется) на максимальную высоту? Какова эта максимальная высота? Можно ли в течение этого времени наблюдать комету невооруженным глазом?

10 КЛАСС

1. Путешествуя по Крымскому полуострову (грубая карта Крыма прилагается), группа любителей астрономии захотела пронаблюдать центр шарового скопления ω Центавра ($\alpha = 13^h27^m$, $\delta = -47°30'$). Смогут ли они это сделать? Если да, то где и как; если нет, то почему? Рефракцию вблизи горизонта считать равной 1°.

2. Определите максимально возможную скорость ледяного метеорита, с которой он влетает в земную атмосферу с начальной температурой −50 °С, чтобы хотя бы небольшая часть его, потеряв скорость, могла достичь поверхности Земли в твердой форме. Считать, что вся энергия движения уходит на нагрев, плавление и испарение. Пренебречь изменением потенциальной энергии при движении в атмосфере. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, теплоемкость воды $c_в = 4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), теплоемкость льда $c_л = 2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг.

3. Оба компонента двойной звезды принадлежат спектральному классу A3 (температура 9500 К). Спутник на 8 звездных величин слабее. Главная звезда с массой две массы Солнца видна в фокусе эллипса, который описывает спутник. Большая полуось эллипса видна под углом 2,5″. Период обращения звезды 177 лет. Оцените приблизительно расстояние до звезд.

4. Задача аналогична задаче 4 для 8 — 9 классов, отличие лишь в последнем предложении:

Эффекты, связанные с суточным вращением Земли, при вычислениях не учитывайте, однако качественно объясните, как они повлияют на продолжительность затмения.

5. Задача аналогична задаче 5 для 8 — 9 классов, но вопрос другой:

Взяв необходимые данные, вычислите период обращения кометы вокруг Солнца.

6. См. задачу 6 для 8 — 9 класса.

11 КЛАСС

1. Звезда находится на расстоянии $R_0 = 8$ кпк от центра сферической галактики и имеет скорость $V_* = 450$ км/с, направленную строго от центра. Полный радиус галактики $R_g = 30$ кпк. Круговые скорости (т.е. скорости движения по круговой орбите) на расстояниях 8 кпк и 30 кпк равны, соответственно, $V_0 = 250$ км/с и $V_g = 150$ км/с. На какое максимальное расстояние от центра галактики удалится звезда? Какую скорость должна иметь звезда, чтобы навсегда покинуть галактику? При вычислениях для простоты считать, что сила притяжения в галактике в интервале расстояний от R_0 до R_g изменяется по линейному закону.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Условие задачи такое же, как в задаче 3 для 10 класса, но вопрос шире:

Оцените приблизительно расстояние до звезд и видимую звездную величину этой двойной системы.

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Условие задачи такое же, как в задаче 5 для 10 класса. Дополнительный вопрос:

Насколько точной можно считать вашу оценку периода кометы?

6. Наблюдаемая астрономами на Земле разность звездных величин в синей и желтой областях спектра, называемая показателем цвета звезды **B—V**, равна 0,22, но этот показатель цвета искажен поглощением межзвездной пылью, которое ослабляет свет звезды. В спектральном диапазоне **B** свет ослабляется в $\alpha_B = 2{,}5$ раза, в диапазоне **V** — в $\alpha_V = 2$ раза. Найдите истинный показатель цвета звезды (в отсутствие поглощения). К какому классу может принадлежать эта звезда?

Задание практического тура

По двум фотоснимкам кометы Хейла — Боппа, полученным специально для олимпиады Данилой Чичмарем с интервалом ровно 24 часа (соответственно 3 и 4 марта 1997 года) на наблюдательной базе в Звенигороде, определите тангенциальную и лучевую скорости кометы (в км/с). Известно, что фокусное расстояние объектива астрографа составляет 500 мм, а фотоснимок представляет собой увеличенный полный фотокадр, имеющий размер 24 × 36 мм.

Школьникам 10 и 11 классов предлагалось, кроме того, оценить погрешность, с какой было выполнено задание.

Участникам были даны два фотоснимка, эфемериды кометы Хейла — Боппа, математические вычислительные таблицы, калька, карандаш, линейка, транспортир.

М.Гаврилов

Призеры IV Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике

Дипломы I степени получили

Гулевич Д., Санкт-Петербруг, 10 кл.,
Журавлев В., Москва, 10 кл.,
Золотухин И., Москва, 8 кл.,
Карпов С., Северодвинск, 11 кл.,
Павлюченко С., Ухта, 10 кл.,
Пестун В., Санкт-Петербург, 11 кл.,
Постнов А., Оренбург, 9 кл.,
Смирнов М., Новгород, 10 кл.,
Чилингарян И., Москва, 11 кл.,
Шапиро А., Санкт-Петербург, 9 кл.

Дипломы II степени получили

Богомолов Ю., Ярославль, 11 кл.,
Бондарь В., п.Восточный Кировской обл., 10 кл.,
Есин М., Нижний Новгород, 10 кл.,
Захаров Р., Сыктывкар, 10 кл.,
Курдубов С., Санкт-Петербург, 9 кл.,
Лемешев В., Тихвин, 9 кл.,
Пудеев А., Нижний Новгород, 11 кл.,
Рахчеев М., Челябинск, 9 кл.,
Сайфутдинов А., Челябинск, 9 кл.,
Тунцов А., Москва, 11 кл.,
Хрешков А., Рязань, 10 кл.,
Эргле С., Нижний Новгород, 9 кл.

Дипломы III степени получили

Белов А., Екатеринбург, 11 кл.,
Белов В., Королев Московской обл., 11 кл.,
Бодров С., Нижний Новгород, 11 кл.,
Бокарев И., Ухта, 9 кл.,
Булатов Р., Новотроицк, 11 кл.,
Дурнов А., с.Ижевское Рязанской обл., 9 кл.,
Евдокимов Н., Москва, 10 кл.,
Жучков Р., Казань, 11 кл.,
Карев Ю., Ухта, 9 кл.,
Коровин С., Краснодар, 10 кл.,
Кузнецов М., Жуковский, 11 кл.,
Мазунин С., Санкт-Петербург, 11 кл.,
Малышаков К., Ярославль, 10 кл.,
Марковчин А., Курск, 10 кл.,
Поднебесов А., Оренбург, 11 кл.,
Попов С., Новгород, 11 кл.,
Степашкин М., с.Ижевское Рязанской обл., 11 кл.,
Шахворостова Н., Краснодар, 11 кл.

Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» проводит Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6 — 10 классов. Срок присылки решений — до 30 января 1998 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу — на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115551 Москва, Ореховый б-р, д. 11, корп. 3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет олимпиады.

Для переписки и сообщения Вам результатов проверки в письмо обязательно вложите:

— пустой конверт с маркой с заполненным домашним адресом;

— дополнительную почтовую марку (марки) достоинством в 1000 руб.;

— краткую анкету: возраст, класс и номер школы, фамилия учителя математики.

Не забудьте сделать пометку, что информацию об олимпиаде Вы узнали из журнала «Квант».

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи — достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение.

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут приглашены к участию в традиционной очередной Всероссийской кон-

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

6 КЛАСС

1. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} 249 \\ \times\ *** \\ \hline *** \\ **8 \\ 2** \\ \hline ****9 \end{array}$$

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$1 + 4 + 9 + \ldots + 225 + 256.$$

3. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся на 49?

4. Фраза «Bekybekjwe — tvunemwe ctyd meuw», имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные на согласные. Расшифруйте.

ференции одаренных школьников, которая состоится в Москве, и, возможно, войдут в команду для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 1998/99 учебном году на льготных условиях.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6 — 10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

5. Существует ли треугольник, у которого сумма сторон больше 1997 м, а площадь меньше $1/1997$ мм^2?

6. На сколько частей делят пространство продолженные плоскости граней куба?

7. Можно ли завернуть в платок размером 3×3 куб со стороной 1, не разрезая платок?

7 КЛАСС

1. Восстановите пропущенные цифры:

```
   941
 × ***
  ----
  **6*
 ****
 -----
 5**3**
```

2. Найдите сумму: $1-2+3-4+\ldots$ … (знак?) $1997=?$

3. Выразите l из соотношения

$$2l+k=\frac{4l^2-k^2}{m+2l}.$$

4. Постройте на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству

$$|x|+x+|y|+y\ge0.$$

5. Найдите геометрическое место точек плоскости, удаленных от заданного отрезка на расстояние 1 см.

6. Из шести одинаковых спичек составьте четыре треугольника с вершинами в концах спичек.

7. На сколько частей делят пространство продолженные плоскости граней равносторонней треугольной пирамиды?

8 КЛАСС

1. Что больше:

$$\sqrt[2000]{\frac{1997}{1998}}\ \text{или}\ \sqrt[2000]{\frac{1998}{1999}}\,?$$

2. Решите систему

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x+y-1}-\dfrac{1}{x-y+1}=1,\\[2mm] \dfrac{2}{x-y+1}-\dfrac{1}{x+y-1}=1\end{cases}$$

3. Существует ли целое число n такое, что

$$n^2=222\ldots22\ (1997\ \text{цифр})?$$

4. Найдите сумму:

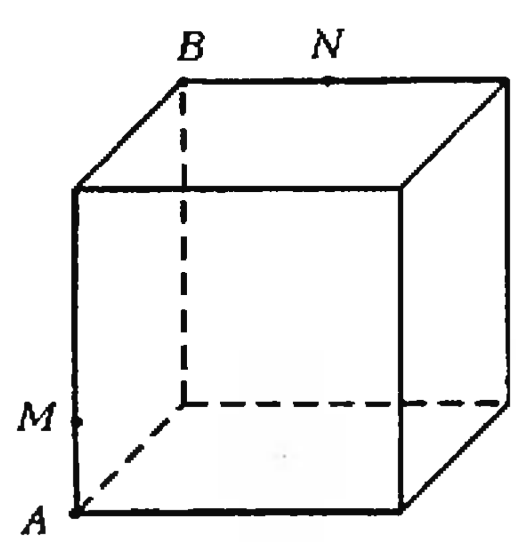
$$1-3+5-7+\ldots(\text{знак ?})\ 1997=?$$

5. Решите в целых числах уравнение

$$\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(x^2+z^2\right)=650.$$

6. Дан равносторонний треугольник со стороной 1. В каком отношении делит его площадь окружность с центром в одной из его вершин, проходящая через центр треугольника?

7. Таракан ползет по поверхности единичного куба из точки M в точку N



(см. рисунок). Определите кратчайшую траекторию таракана и найдите ее длину, если $AM=1/3$, а $BN=1/2$.

9 КЛАСС

1. Избавьтесь от иррациональностей в выражении

$$\sqrt{24-2\sqrt{80}}-\sqrt{2\sqrt{20}+21}.$$

2. Решите уравнение

$$x^{1997}+x^{1996}+\ldots+x+1=0.$$

3. При каких условиях на коэффициенты a, b, c уравнение $ax^4+bx^2+c=0$ имеет ровно два корня, причем разных?

4. См. задачу 4 для 7 класса.

5. В треугольнике ABC ($AB=5$, $BC=12$, $AC=13$) проведена окружность с центром в точке B, касающаяся стороны AC. Найдите суммарную площадь кусков треугольника, не попавших внутрь круга.

6. Докажите закон сохранения $r_1^2+r_2^2=\text{const}$, где r_1 и r_2 — радиусы намотанных лент на двух катушках магнитофонной кассеты.

7. Расстояние между точками A и B пространства равно 1. Найдите геометрическое место точек M пространства таких, что длины AM и BM — целые числа.

10 КЛАСС

1. Решите неравенство

$$\sin(\arcsin x)\ge\arcsin(\sin x).$$

2. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству

$$\left(x^2+y^2-2y\right)\left(y-x^2\right)>0.$$

3. Решите в целых числах уравнение

$$x^4\left(y^2+z^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+2x^2y^2z^2=50.$$

4. Известно, что степень многочлена $P(P(x))$ равна степени многочлена $P(x)$. Найдите все такие многочлены, у которых

$$\left(P(P(0))\right)^2-\left(P(0)\right)^2=0.$$

5. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(xy)=f(x)f(y)+f(x)-f(y)+f(x-y)$$

при всех x и y. Докажите, что $f(1997)\ge0$.

6. На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек S плоскости таких, что треугольник ASB — тупоугольный.

7. Считая Землю шаром радиусом R, найдите площадь земной поверхности, ограниченной меридианами 19°59′ и 20°37′ в.д., а также (с юга) траекторией кратчайшего пути между точкой пересечения первого меридиана с Северным тропиком и второго меридиана с Южным тропиком. (Широта тропика 23°27′.)

ВАС ЖДЕТ ОЛ ВЗМШ

Эта школа — ее полное название Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)» Российской академии образования, она работает при Московском университете им. М.В.Ломоносова — государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников, а и для всех, кто хочет пополнить свои знания в области одной или нескольких из семи наук: математики, физики, химии, биологии, филологии, экономики и правоведения. На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, которая имеет отделения математики, биологии и химии (подробности — ниже).

ВЗМШ знакома уже нескольким десяткам поколений школьников — ведь она существует с 1964 года, дав за это время удостоверения об окончании курса обучения нескольким сотням тысяч школьников и тысячам кружков — групп «Коллективный ученик».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ. Это значит, что, поступив в школу, Вы будете начиная с сентября 1998 года систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, разнообразные задачи для самостоятельного решения и контрольные задания.

Ваши контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, других вузов и учреждений, где имеются наши филиалы. Некоторые из наших преподавателей сами закончили ВЗМШ и особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути исправления старых пробелов в Ваших знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметное повышение кругозора и уровня культуры.

За время обучения Вы сможете узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьных учебников, познакомиться с массой интересных задач и попробовать свои силы в их решении. Для многих из вас станет открытием, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, а и в биологии, и в лингвистике, и в экономике, эти задачи прояснят Вам многие казавшиеся скучными и неинтересными разделы науки.

Особенностью программ и учебных пособий, по которым учатся в ВЗМШ, является то, что их авторы — коллективы, в которых действующие на переднем крае науки ученые сотрудничают с опытными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

В настоящее время ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет работы по переводу части своих заданий на язык современных телекоммуникаций и разработке новых технологий в образовании. Поступившие к нам имеют уникальную возможность принять участие в этом эксперименте в самом разном качестве.

В нашей школе Вы научитесь самостоятельно и продуктивно работать с книгой; грамотно, четко и ясно излагать свои мысли на бумаге, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, нам удастся помочь Вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все окончившие ОЛ ВЗМШ получают соответствующие удостоверения. Формальных преимуществ такое удостоверение не дает, но приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений — люди, в течение продолжительного времени стремившиеся получить дополнительные знания, преодолевшие для этого немало трудностей и, значит, хорошие кандидаты в студенты.

Для поступления к нам надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно — это не значит обязательно решить все задачи. Нас интересует, в первую очередь, Ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не всегда удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах — там нет крупных научных центров и учебных заведений, и поэтому дополнительное образование можно получить лишь заочно.

Решения задач надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку (на отделение экономики — на открытке, см. ниже) и выслать простой бандеролью, не сворачивая в трубку.

Укажите на обложке:

фамилию, имя, отчество, год рождения, род занятий (класс, школа с указанием ее адреса и учителя по данному предмету — для школьников; профессию, должность и т.п. — в другом случае), полный почтовый адрес (с индексом), откуда узнали о нашей школе (из «Кванта», от друзей, из нашей афиши, от учителя и т.п.).

Если Вы хотите поступить сразу на несколько отделений, каждую работу пришлите в отдельной тетради.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ — *не позднее 15 апреля 1998 года*.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых) туров Всероссийской олимпиады, а также заочного и второго туров Соросовской олимпиады для школьников и учащихся СПТУ по соответствующим предметам и участники республиканских (соответственно третьего) туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. Если учащийся (его семья) не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ может, получив мотивированное заявление и справки, полностью или частично освободить от оплаты, а также обратиться в любое указанное заявителем учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией расходов по обучению.

Не успевшие или не сумевшие поступить на индивидуальное обучение могут заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ» (кроме отделения экономики). Каждая такая группа — кружок, работающий под руководством школьного учителя или другого преподавателя, в основном по той же программе и пособиям, что на индивидуальном обучении. Прием в эти группы проводится до *15 октября 1988 года*. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 1998 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, а также главой учреждения, при котором будет работать группа, и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия. На разных отделениях ВЗМШ свои правила приема групп (см. ниже).

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделения математики и химии, высылают вступительные работы по адресу:

198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32. С-З ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье, высылают свои работы в адрес ВЗМШ или (по математике) в адрес соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ:

119823 ГСП, Москва В-234, МГУ, ВЗМШ (на прием, с указанием отделения).

Тел. (095)939-39-30, 939-44-32.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ при университетах работают в городах: Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Ростов-на-Дону, Самара, Ульяновск, Челябинск, Ярославль; при педагогических институтах — в городах: Киров, Петрозаводск, Тернополь; имеются также филиалы при Брянском Дворце творчества молодежи, Калужском Центре научно-технического творчества молодежи и Могилевском областном Дворце пионеров.

Вступительная работа на отделение математики

На этом отделении, с которого началась история ВЗМШ, Вы сможете лучше понять основные идеи главных разделов школьного курса элементарной математики: метод координат на прямой, на плоскости и в пространстве (даже в четырехмерном); функции, их свойства, основные методы исследования и построения их графиков; целые числа и многочлены; тригонометрия; основные геометрические идеи школьного курса; начала математического анализа. Для хорошо усвоивших основной курс по их желанию будут предложены специальные главы: комплексные числа и простейшие функции комплексного переменного; начала теории игр; введение в комбинаторику и теорию вероятностей и др. По желанию можно дополнительно заняться и решением задач олимпиадного типа. На выпускном курсе большое внимание будет уделено подготовке к вступительным экзаменам в вузы. Обучающиеся на этом отделении получают подготовку, необходимую не только для выбора математики в качестве профессии, но и для успешного освоения других специальностей (а математика сейчас служит одним из основных инструментов исследований во многих отраслях знания).

По результатам выполнения помещенной ниже работы (около каждой задачи указано, школьникам каких классов она адресована) проводится прием учащихся, получивших к сентябрю 1998 года знания по математике в следующем объеме:

— на 1 курс — 7 классов средней школы;

— на 2 курс — 8 классов (им будет предложена часть заданий за первый курс);

— на 3 курс — 8 классов (им будет предложена часть заданий за два первый курса);

— на 4 курс — обучение либо по специальной интенсивной программе с выполнением части заданий за 1, 2 и 3 курсы, либо только по подготовке в вуз (на обложке тетради должно быть указано, какой из этих вариантов выбран поступающим).

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

1 (7–10). Фирма «Пупс» купила на распродаже автомобиль на 35% ниже начальной цены, а продала — на 25% ниже начальной цены. Сколько процентов прибыли она получила?

2 (7–10). Является ли полным квадратом число

$$1995 \cdot 1996 \cdot 1997 \cdot 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 + 36?$$

3 (7–10). Из 24 бочонков одинакового объема 5 заполнены водой доверху, 11 — наполовину и 8 — пустых. Как разделить их между тремя людьми так, чтобы каждому досталось по одинаковому количеству бочонков и равному количеству воды?

4 (7–10). Сколько существует окружностей, касающихся трех данных равных непересекающихся кругов (снаружи или изнутри),

а) если центры кругов являются вершинами правильного треугольника;

б) если центры кругов лежат на одной прямой?

5 (7–10). Пусть m и n — целые числа. Если сложить их сумму, разность, произведение и частное, получится 150. Найдите m и n.

6 (9–10). Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$$

7 (9–10). Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности еще в точках P и Q. Найдите геометрическое место середин отрезков PQ, если вращать прямую PQ вокруг точки A.

8 (7–10). В первом ящике 68 шаров, а во втором — 97. Двое играющих поочередно берут шары, причем за один ход игрок может взять из любого (но только одного) ящика произвольное количество имеющихся в нем шаров. Выигрывает берущий последние шары. Кто выигрывает при правильной игре, начинающий или его партнер, и как надо для этого играть?

9 (8–10). Пусть ABC — правильный треугольник. На продолжении CE стороны AC построили новый правильный треугольник, CDE, причем точка D лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка B. Пусть M — середина отрезка AD, N — середина отрезка BE. Верно ли, что треугольник CMN — тоже правильный?

10 (7–10). По кругу бегают три человека. Один из них пробегает круг за 4 минуты, другой — за 5, третий — за 6. Вначале они находились в одной точке. Сколько всего будет попарных встреч до того момента, когда они все трое снова встретятся вместе, если: а) все трое бегут в одном направлении; б) третий бежит в направлении, противоположном двум другим?

Вступительная работа на отделение биологии

Отделение проводит 25-й набор. Особое внимание при обучении уделяется областям биологической науки, наименее раскрытым в школьной программе: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

Коллективом отделения создан комплекс уникальных учебных пособий и задачников (часть из них издана массовым тиражом издательством «МИРОС»), работа по написанию и изданию новых книг не прекращается.

Проводится набор на два потока:

— трехгодичное обучение на базе 8 классов;

— двухгодичное обучение на базе 9 классов.

Группы «Коллективный ученик» также выполняют вступительную работу, но коллективную, и высылают ее на проверку вместе с заверенным печатью списком членов кружка и с указанием фамилии, имени и отчества руководителя кружка и названия организации, при которой он работает.

В помещенной ниже работе поступающие на трехгодичное обучение решают задачи 1 — 5, а на двухгодичное — задачи 2 — 6.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе (тогда необходимо привести ссылки на эти источники), и Ваши собственные идеи.

Вместе с работой пришлите стандартный конверт с маркой и с заполненным адресом (для отправки Вам решения Приемной комиссии).

1. Какими способами разные животные заботятся о потомстве? Приведите по одному-два примера использования каждого из указанных Вами способов. Опишите случаи, когда у какого-то вида можно встретить сразу несколько способов заботы о потомстве.

2. Перед Вами — список растений: абрикос, ананас, бук, ива, калина, кипарис, лимон, липа, лиственница, малина, облепиха, ольха, рябина, саксаул, секвойя, эвкалипт. Предложите как можно больше критериев, по которым их можно разделить на две или на три группы. Для каждого критерия укажите, какие растения в какую группу попадут.

3. Доктор Аккурат кормил гуппи в своем аквариуме живыми дафниями, смешивая рачков разного размера. Он обнаружил, что крупные дафнии поедаются быстрее, чем мелкие. С чем это может быть связано? Как проверить Ваши гипотезы? (Имейте в виду, что несколько факторов могут действовать одновременно.) По данным доктора Наплевайта все обстоит не так: гуппи быстрее поедают мелких дафний. Чем это можно объяснить?

4. Отставной поручик Чебурков решил свести лес, занимавший существенную часть его поместья, а на освободившихся землях выращивать картофель и пшеницу. Однако Чебурков опасается, не скажутся ли эти изменения на составе воды в озере, которое находится в центре леса и используется его домашними как источник питьевой воды. Какое влияние могут оказать планируемые перемены на качество воды в озере? Опишите как можно больше возможных механизмов.

5. Часто встречаются случаи, когда постоянные жители болеют какими-то болезнями реже, чем люди, приехавшие в данную местность. С какими причинами это может быть связано? По возможности приведите примеры, подтверждающие Ваши соображения.

6. Физиологи выделяют четыре способа пищеварения: внутриклеточное, полостное, пристеночное и наружное. У представителей каких систематических групп они встречаются? Каковы достоинства и недостатки каждого из этих способов?

Вступительная работа на отделение физики

Отделение работает 6 лет. За это время создана программа двухгодичного курса, для которого написано несколько учебных пособий и ведется работа по написанию новых.

Основное внимание уделяется изучению физики с помощью решения задач, излагаются методы, пригодные как для стандартных, так и для более сложных ситуаций. В программе — все основные разделы школьного курса физики, а также темы, мало изучаемые в школе.

Поступающие на двухгодичный поток (на базе 9 классов школы) решают задачи 1 — 5 приведенной ниже вступительной работы; поступающие на одногодичный поток (на базе 10 классов) — задачи 4 — 8; желающие за один год пройти всю двухгодичную программу (на базе 10 классов) решают все задачи и пишут «10 + 11» на обложке тетради.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

1. Автомобиль равномерно движется навстречу ветру в дождливую погоду. Капли дождя оставляют на боковом стекле следы под углом $\alpha = 60°$ к вертикали. Если автомобиль движется с той же скоростью в противоположную сторону, то следы от капель составляют угол $\beta = 30°$ с вертикалью. Найдите отношение скорости автомобиля к скорости ветра.

2. Тело брошено с земли под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Через время $\tau = 4$ с скорость тела оказалась направленной вниз под углом $\beta = 30°$ к линии горизонта. Найдите общее время полета тела.

3. Два груза массами m_1 и m_2 соединены длинной нитью, переброшенной через неподвижный блок. Один из грузов представляет собой емкость с песком. В некоторый момент песок начинает высыпаться, и через промежуток времени T емкость оказывается пустой. Считая скорость высыпания песка постоянной, постройте график зависимости силы давления нити на ось блока от времени. Массой емкости можно пренебречь, нить и блок идеальные.

4. Заводную машинку массой m запускают по длинной доске массой M, которая может скользить по гладкой горизонтальной поверхности. Найдите скорость машинки относительно доски в тот момент, когда потенциальная энергия пружины в машинке уменьшится на величину E от своего начального значения.

5. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F получают изображение палочки длиной $F/2$.

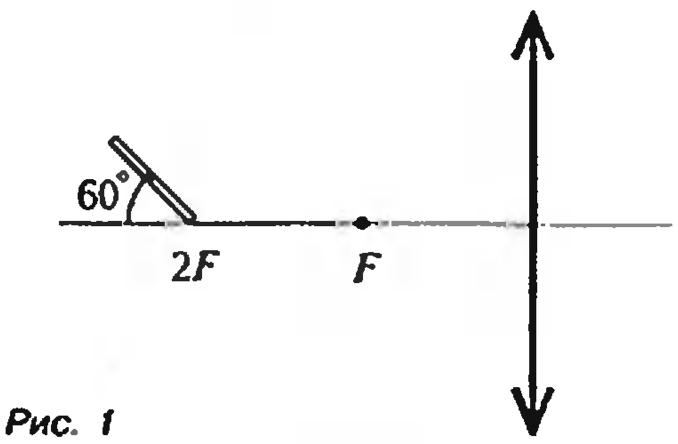


Рис. 1

Палочка наклонена под углом 60° к главной оптической оси линзы, а нижний конец палочки расположен на этой оси на расстоянии $2F$ от линзы (рис. 1). Середина палочки помечена. В каком отношении изображение метки делит изображение палочки?

6. Прямоугольная коробка расположена так, что ее дно составляет угол $\alpha < 45°$ с горизонтом. Под каким минимальным углом β можно поставить палочку у стенки этой коробки (рис. 2), чтобы палочка не упала? Коэффициент трения между палочкой и дном коробки μ, стенки коробки гладкие. Длина палочки меньше высоты коробки.

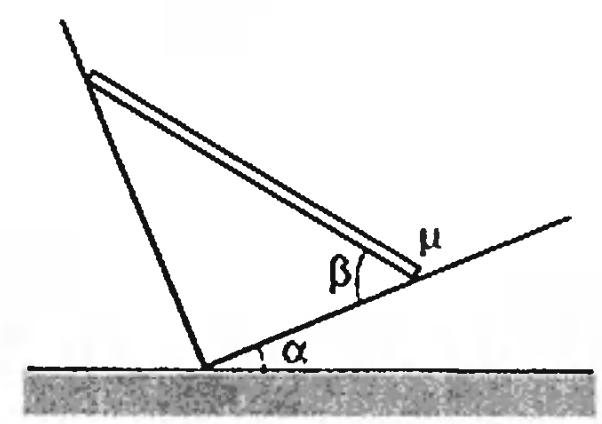


Рис. 2

7. Три различных сосуда, содержащих одноатомные идеальные газы, соединены попарно трубками с кранами. Пока все краны закрыты, температуры газов равны T_1, T_2, T_3. Если открыть кран на трубке между I и II сосудами, то получается смесь с температурой T_4, а если между I и III сосудами — то смесь с температурой T_5. Какова будет температура смеси, если открыть кран на трубке между II и III сосудами? Поте-

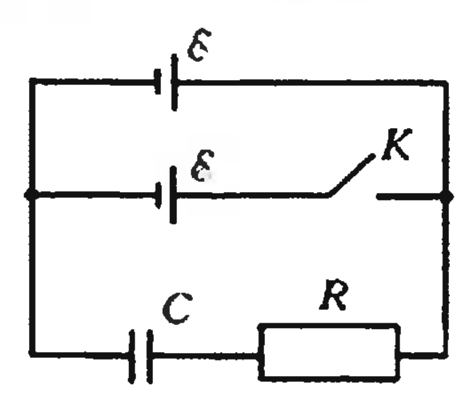


Рис. 3

рями тепла через стенки сосудов и трубок пренебречь.

8. Найдите количество теплоты, которое выделится на резисторе после размыкания ключа K в схеме, изображенной на рисунке 3. Известны величины $\mathscr{E}$, C, R. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Вступительная работа на отделение химии

На двухгодичное обучение принимаются имеющие к сентябрю 1998 года знания в объеме 9 классов средней школы, они решают задачи 1 – 6 помещенной ниже работы; на одногодичный поток требуется база 10 классов средней школы, надо попытаться решить все задачи вступительной работы.

На первом курсе изучается общая и неорганическая химия, на втором – органическая химия. На обложке тетради с вступительной работой необходимо указать, на какой курс Вы хотите поступить.

1. Напишите уравнение реакции, в которой элемент пятой группы одновременно повышает и понижает степень окисления.

2. При растворении некоторого вещества в соляной кислоте масса раствора уменьшилась. Определите вещество и напишите уравнение реакции.

3. Определите формулу вещества, если известно, что оно содержит 3,226% Cr, 9,677% N, 48,39% O, 38,71% H (по молям). Назовите это вещество, предложите способ его получения и напишите одно уравнение реакции с его участием.

4. Напишите уравнения реакций, соответствующих следующей последовательности превращений:

$$Mn \to MnSO_4 \to MnO_2 \to MnCl_2 \to$$
$$\to Mn(OH)_2 \to MnO \to Mn.$$

5. Какие вещества и при каких условиях вступили в реакцию, если образовались следующие вещества (указаны все продукты без коэффициентов):

1) $KNO_3 + Cr(NO_3)_3 + H_2O$;
2) $HPO_3 + P_2O_5$;
3) изопропилбензол + H_2 ?

6. При прокаливании смеси нитратов железа (II) и ртути образовалась газовая смесь, которая на 10% тяжелее аргона. Во сколько раз уменьшилась масса твердой смеси после прокаливания?

7. При действии на непредельный углеводород избытка раствора хлора в четыреххлористом углероде образовалось 4,06 г дихлорида. При действии на такое же количество углеводорода избытка бромной воды образовалось 5,84 г дибромида. Определите молекулярную формулу углеводорода и напишите структурные формулы четырех его изомеров, отвечающих условию задачи.

Вступительная работа на отделение филологии

Это отделение работает 7 лет. На нем может учиться любой человек, освоивший программу 7 классов средней школы, независимо от возраста.

Освоившим программу 8 классов предлагаются три независимых цикла обучения (можно выбрать из них любое количество).

1. *Цикл «Русский язык».* В программе: тренировка практической грамотности, разборы; сведения об истории языка и его современном устройстве; знакомство с современной проблематикой науки о языке и смежными с ней областями знания.

2. *Цикл «Сочинение».* Вы научитесь анализировать художественное произведение, узнаете, что такое сочинение и какие они бывают, познакомитесь с основными летаратуроведческими понятиями и научитесь их применять; Вам будет предложен (и совместно с Вами проведен) анализ литературных произведений школьной и абитуриентской программ; Вы поймете, что такое хорошее знание текста произведения и как его добиться.

3. *Цикл «Общая филология».* Вам предстоит познакомиться с основами литературоведения и лингвистики: узнать, как разнообразно устройство языков мира и что такое язык вообще; научиться решать уникальный тип задач, разработанный лингвистами-теоретиками Московского университета и не имеющий аналогов в мире, – так называемые лингвистические задачи, составленные на материале самых разных языков; Вас ожидают занятия логикой, древними языками и литературой.

Внимание! Каждый из этих циклов Вы можете пройти по стандартной (2 года) или интенсивной (1 год) программе.

На обложке тетради с вступительной контрольной работой обязательно укажите цикл и срок обучения, который Вы выбрали.

Обязательно объясните свои выводы и решения задач. Не расстраивайтесь, если какие-то вопросы оказались Вам не по силам. Иногда для зачисления бывает достаточно хорошего, вдумчивого ответа на 2 – 3 вопроса.

На отделении нет групп «Коллективный ученик», но возможна работа в «командах» по 2 – 3 человека.

1. «Однажды иностранцу захотелось выучить песню «Ой, мороз, мороз» на русском языке. Он включил магнитофон с записью этой песни и, поминутно нажимая кнопку «пауза», записал в своем блокноте (разумеется, латинскими буквами, потому что русского алфавита не знал; мягкость согласных он обозначал знаком '): OI MOROZ MOROZ NE MOROZ' MEN'A...»

Верите ли вы этой истории? Могло ли все быть так, как рассказано? Если нет, найдите в рассказе неточности и исправьте их, чтобы он стал достоверным.

2. Вернувшись из экспедиции к диким племенам, доктор Ватсон делился с Шерлоком Холмсом своими впечатлениями.

– Представляете, Холмс, в языке племени мумбо-юмбо очень много однокоренных слов, которые относятся к разным частям речи, а выглядят при этом совершенно одинаково! Например, слово «BUM» может обозначать «охотник», «охотничий» и «охотиться», слово «BOM» – «железо», «железный» и «ковать», «BIM» – «слеза», «плакать» и «печальный», и т.д. При этом у них не появляется никаких суффиксов, окончаний и проч., которые могли бы указывать, к какой части речи относится слово! Вообще у этого языка много характерных черт...

– Дорогой Ватсон, я готов сам назвать вам еще одну черту языка мумбо-юмбо, – улыбнулся Холмс.

И назвал.

– Вы изучали мумбо-юмбо? – изумился доктор.

– Вовсе нет, но из того, что вы сказали, можно сделать определенные выводы.

Попробуйте восстановить рассуждение Шерлока Холмса и «вычислить» еще одну черту языка мумбо-юмбо.

3. Даны пары синонимов – слов, близких по значению. Для каждой пары придумайте: а) такой контекст (ситуацию, фразу, словосочетание), в котором они взаимозаменяемы; б) такие контексты, в которых один синоним нельзя заменить другим без ущерба для смысла.

ТОЩИЙ – ХУДОЙ;
ДОГНАТЬ – НАСТИЧЬ;
РУКА – ДЕСНИЦА;
ЯД – ОТРАВА.

4. Известно, что в литературе существуют так называемые «бродячие сюжеты», к которым разные авторы обращались и воплощали их по-разному в разные эпохи. Представьте себе, что к сюжету «Красной Шапочки» обратился литератор — современник и поклонник стиля а) русских поэтов-романтиков; б) И.А.Крылова; в) А.П.Чехова. Выберите одну из перечисленных возможностей и попробуйте воплотить этот бродячий сюжет так, как это сделал бы наш литератор. Объем — не более 2 тетрадных листов.

5. Прочитайте повесть А.Пушкина «Капитанская дочка». Кто ее главный герой (герои)? Почему повесть так называется? В эпоху Пушкина были распространены названия, представляющие собой имена персонажей. Почему Пушкин назвал свое произведение не «Маша Миронова», а «Капитанская дочка»? Свои ответы обоснуйте.

6. Прочитайте комедию А.Грибоедова «Горе от ума». В ее развязке сразу несколько персонажей попадают в весьма неприятное положение, терпят своего рода крах.

Проанализируйте в каждом случае: в чем заключается драматизм развязки для каждого из персонажей? Связано ли это как-нибудь с авторским отношением к героям?

7. Найдите в тексте стилистические ошибки и выпишите. Для каждого неправильного словоупотребления дайте исправленный вариант.

«Пожар случился благодаря халатности Иван Петровича, сторожа. Вместо того, чтобы ходить дозором вокруг сарая, вверенного под его ответственность, старичок присел в кресло у телевизора посмотреть новости, да и заснул. Разбудил его резкий запах дыма: горел телевизор. Лихорадочно одев картуз и ватник, Иван Петрович выскочил на улицу, позвать за помощью, да было уж поздно. Сарай пылал. Тут же начались неприятности. Власть предержащие решили, что председатель товарищества вышел за рамки своей компетентности, когда нанимал сторожа, а председатель, в свою очередь, стал хлопотать, чтобы дело отдали под суд общественности, и давал по три интервью в день; даже в телевизоре выступал. Тут же и слухи пошли: одни говорят, Иван Петрович — террорист, другие — вовсе не террорист, а наоборот зеленый, и протестует за хорошую экологию. Иван Петрович, и правда, от всех этих забот малость позеленел. Однако утряслось; отделался старик легким испугом, только телевизор смотреть бросил совсем.»

Вступительная работа на отделение экономики

Отделение проводит прием в пятый раз. Основной курс обучения — он называется «Прикладная экономика» — один год, далее — специализация по выбору: «предпринимательство и менеджмент», «бухгалтерский учет и финансовый анализ» и др. Основной курс включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке.

Принимаются все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов средней школы. Обучение ведется либо индивидуально, либо по небольшим группам (2 — 5 человек). Формы обучения «Коллективный ученик» пока нет.

Вступительная работа — тест — включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе, общей культуре.

Решения присылайте ТОЛЬКО на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все — ПЕЧАТНЫМИ буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 1998 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который Вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу (пробелы между словами и знаки препинания расставьте по собственному желанию).

1. Архимед, сев в ванну и открыв, что объем вытесненной им воды равен объему части его тела, погруженного в эту жидкость, воскликнул: «Эврика!» Это означало:

К) «Ура!» (по-русски); Б) «Нашел!» (по-русски); В) что он звал свою собаку, чтобы повторить на ней эксперимент; П) что он звал свою жену Эврику; Э) «Придумал!» — вот что хотел сказать Архимед.

2. Наловил Емеля щук и понес на базар. Всех распродал, кроме одной, говорящей. Решил Емеля продать ее царю за 100 монет и уже предвкушал, как похвастается в деревне, что продал щук по средней цене 10 монет. Но царь дал за щуку только 20 монет, так что хвастаться стало нечем — теперь средняя цена щуки стала только 6 монет. Сколько щук наловил Емеля:

К) 2; О) 10; Ы) 20; П) 100; У) нельзя определить?

3. Автор строк «Ах, обмануть меня не трудно — я сам обманываться рад...»:

О) А.С.Грибоедов; Е) Д.И.Фонвизин; Р) М.Ю.Лермонтов; Т) А.С.Пушкин; С) Е.А.Баратынский.

4. Если 1 доллар стоит 5740 рублей, а 1 франк — 1044 рубля, то каков курс доллара по отношению к франку, рассчитанный через рубль (с точностью до десятых долей):

Ь) 5,5; О) 0,2; Р) 0,1; Н) 5,4; Т) 5,6?

5. Выберите из списка лишнее слово:

В) Огайо; Е) Кентукки; Э) Виктория; О) Небраска; Ь) Оклахома.

6. Декаданс — это:

М) танец, модный во Франции в конце XVIII века; В) стиль в изобразительном искусстве 2-й половины XVII века; Д) особо учтивый реверанс; Ц) танцевальное па; К) кризис художественной культуры.

7. Выберите лишнее имя из списка:

С) Лучано Паваротти; К) Плачидо Доминго; И) Хосе Каррерас; А) Марио Ланса; О) Монсеррат Кабалье.

8. Какие товары являлись основной статьей экспорта на Руси в XIV веке:

Н) пушнина и воск; Е) мед и воск; К) шелковые ткани и пряности; П) виноградное вино; М) пенька и нефть?

9. Где были изобретены основные принципы и приемы бухгалтерского учета:

Г) в Германии; И) в Англии; О) в Италии; А) в России; К) в Индии?

10. В какой из перечисленных стран доллар не является национальной валютой:

Д) США; М) Мексика; Н) Канада; Ш) Австралия; В) во всех, кроме США?

11. «Москва — третий Рим, и четвертому — не бывать» — эта идея впервые возникла:

И) во 2-й половине XV века; А) в 476 г.; Л) в середине X века; Ы) в 60-х годах XVII века; Р) в 10-х годах XIX века.

12. Про какую страну можно сказать, что конституционная монархия была ее формой правления в указанную эпоху:

Ш) Англия в XVII веке; А) Россия в конце XIX века; М) Франция в 80-х годах XIX века; С) Голландия в 60-х годах XX века; Б) Испания в 40-х годах XX века?

13. Какой из перечисленных подвигов не является одним из 12 подвигов Геракла:

Е) очистка Авгиевых конюшен; У) убийство Критского быка; П) похищение пояса Ипполиты; З) похищение яблок Гесперид; Т) убийство Медузы Горгоны?

14. Какая страна не входит в «Большую Семерку»:

Д) Великобритания; Н) Франция; О) Австрия; Б) Канада; К) Италия?

15. В некотором царстве, в некотором государстве сражался Добрыня Никитич со Змеем Горынычем. Как отсекал он Змею зараз три головы, у того вырастало одиннадцать новых, а как отсекал он за раз пять голов, у Змея

вырастала лишь одна новая. Сначала у Змея было 1999 голов. Скоро сказка сказывается, да не скоро дело делается. Захотелось Добрыне кваску хлебнуть. Сколько голов могло остаться к тому времени у Змея:

Г) 1 голова; У) 2 головы; М) 3 головы; А) 4 головы; Е) 5 голов?

16. Компьютерная сеть «Интернет» первоначально была создана для:

У) компьютерного промышленного шпионажа; Д) заказов товаров из магазинов с домашнего компьютера; Н) денежных и финансовых расчетов между крупными банками; К) обеспечения связи в условиях глобальной войны; Т) тотального контроля за содержимым всех компьютеров.

17. Какое слово является лишним в списке:

У) рейвер; Л) соккер; И) байкер; С) роллер; Е) рокер?

18. Какая из следующих пьес У.Шекспира не является трагедией:

Щ) «Король Лир»; Я) «Отелло»; А) «Двенадцатая ночь»; В) «Гамлет, принц Датский»; О) «Юлий Цезарь»?

19. Отец Федор вычитал в журнале «Нива», что кролики очень быстро размножаются и приносят большой доход. Он подсчитал, что если он в начале июля купит пару кроликов, то в начале августа они принесут ему пару крольчат. В начале сентября они родят еще пару крольчат, а в начале октября, вдобавок к еще одной паре крольчат, та пара кроликов, что родилась в августе, принесет еще пару крольчат (отец Федор считает, что кролики на второй месяц после рождения способны приносить приплод). Сколько пар кроликов будет резвиться на дворе отца Федора через год в июле, если все пойдет так, как он задумал:

Е) 55; М) 121; Т) 253; С) 377; Л) 500?

20. Изначально слово «сессия» означало:

И) плановую проверку готовности солдат к боевым действиям в Древнем Риме; Е) профилактическую порку рабов и слуг в Латинской Америке; Ь) специальную постройку в университетском комплексе для проведения экзаменов; Н) экзамен на звание магистра; С) периодические заседания представительного органа.

Вступительная работа на отделение «Нравственность, право, закон»

не требуется: принимаются все желающие изучить одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В создании курса принимает участие Институт «Открытое общество». В дальнейшем предполагается продолжение курса еще на один год: в настоящее время готовятся к печати соответствующие пособия.

Для овладения курсом достаточно знаний 7 классов средней школы.

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства общего и профессионального образования РФ при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 1998/99 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года. За это время школу окончили свыше 54 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ — выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт, который готовит инженеров-физиков и инженеров-математиков по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладные математика и физика». В подготовке специалистов принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ — крупнейшие ученые, среди которых около ста членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 1998/99 учебный год проводится на следующие отделения:

— *Индивидуальное заочное обучение (тел. (095) 408-51-45)*

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8–11 кл.), но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 кл., 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто — выпускники ЗФТШ).

— *Очно-заочное обучение в физико-технических кружках и факультативах (тел. (095) 485-42-27)*

Заочные физико-технические кружки и факультативы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка или факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список обучающихся (с указанием класса и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт с маркой достоинством 950 руб. для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 25 мая 1998 года по адресу: *141700 г. Долгопрудный Московской* *обл., Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Кружок» или «Факультатив»).* Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются. Работа руководителей кружков и факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением, по представлению ЗФТШ при МФТИ, как факультативные занятия.

Руководители кружков и факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители кружков и факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

— Очное обучение в вечерних консультационных пунктах (ВКП) (тел. (095) 408-51-45)

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в мае и сентябре.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех видов обучения. Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ предлагается участвовать в пробных вступительных экзаменах в МФТИ, которые проводятся в марте и июне, в очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. По окончании учебного года успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения переводятся в следующий класс, а выпускники (11 кл.) получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ. Вне конкурса (без решения вступительного задания) в ЗФТШ принимаются участники областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике (участие нужно потвердить справкой из школы).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу.

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки Вам первого задания обязательно вложите в тетрадь два конверта: обычный почтовый с маркой достоинством 950 руб. и бандерольный размером 160×230 с маркой достоинством 1300 руб. На конвертах напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1998 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1998 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.

Для учащихся из стран ближнего зарубежья возможно платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для желающих и прошедших конкурсный прием по результатам вступительного задания будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 6–11 – для восьмых классов, 9–14 – для девятых классов, 13–18 – для десятых классов. В задании по математике задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3–8 – для восьмых классов, 5–11 – для девятых классов, 8–14 – для десятых классов.

Номера классов указаны на текущий 1997/98 учебный год.

1. Область	*Самарская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Алешин Виталий Владимирович*
3. Класс, в котором учитесь	*девятый*
4. Номер школы	*№ 51*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*физико-технический лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*445030 г. Тольятти, ул. Цветной бульвар, д. 25, кор. 1, кв. 18, тел. 33-85-71*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*АО «АвтоВАЗ», инженер*
мать	*поликлиника № 1, врач*
8. Адрес школы и телефон	*445037 г. Тольятти, ул. Фрунзе, д. 12, тел. 32-23-31*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Дворецкая Наталья Владимировна*
по математике	*Маковлева Галина Николаевна*
10. Каким образом к Вам попала эта информация?	

№ п/п								Σ
Ф.								
М.								
Л. №								

Вступительное задание ЗФТИ по физике

1. По дороге, расположенной параллельно железнодорожному пути, движется велосипедист со скоростью 8 км/ч. В некоторый момент его догоняет движущийся равномерно поезд длиной 120 м и обгоняет его за 6 с. Какова скорость поезда?

2. Стенки вагона поезда, движущегося со скоростью 72 км/ч, были пробиты пулей, летевшей перпендикулярно направлению движения вагона. Одно отверстие смещено относительно другого на 6 см. Расстояние между пробитыми пулей стенками вагона 2,7 м. Какова была скорость полета пули? Считать, что стенки вагона настолько тонкие, что траектория движения пули и ее скорость не изменились после того, как она пробила первую стенку.

3. В сообщающихся сосудах правое и левое колена состоят из одинаковых трубок. Трубки частично заполнены водой. На сколько повысится уровень воды в левой трубке, если в правую налить столько керосина, что он образует над уровнем воды в правой трубке столб высотой H = 30 см? Плотность керосина $\rho_к$ = 800 кг/м^3, воды $\rho_в$ = = 1000 кг/м^3.

4. На столе лежат стопкой 10 одинаковых книг. Когда требуется приложить меньшую силу: а) чтобы сдвинуть одновременно пять верхних книг; б) чтобы вытянуть из стопки только четвертую сверху книгу, оставив остальные книги на месте? Ответ обоснуйте.

5. Сосуд в форме куба с ребром h = = 36 см целиком заполнен водой и керосином. Жидкости не смешиваются. Масса воды равна массе керосина. Определите давление жидкостей на дно сосуда. Толщиной стенок сосуда пренебречь. Плотность керосина $\rho_к$ = = 800 кг/м^3, воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3; g = 10 Н/кг.

6. В сосуд с водой плотностью $\rho_в$ опущена вертикально трубка квадратного сечения. В трубке с помощью нити удерживается стальной кубик плотностью ρ (рис.1,*а*). Трение и зазор между стенками трубки и кубиком, ребро которого a, отсутствуют. На ка-

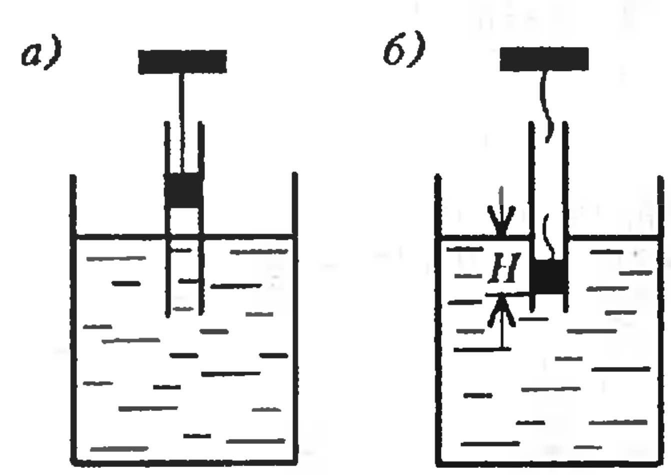


Рис. 1

кой глубине H (см. рис.1,*б*) остановится кубик, если нить оборвется?

7. Тонкостенная трубка радиусом r, закрытая снизу металлической пластинкой, имеющей форму цилиндра ра-

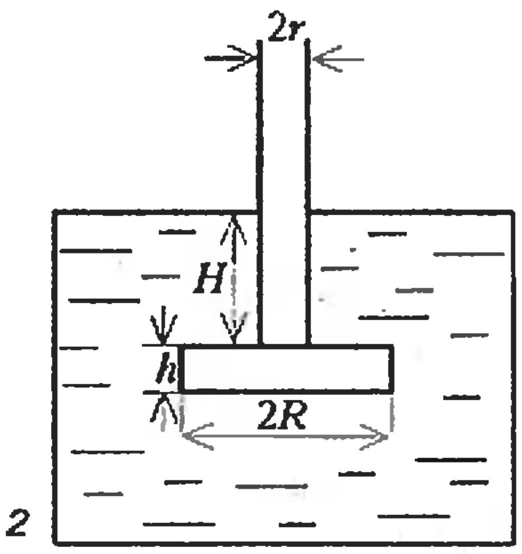


Рис. 2

диусом R ($R > r$) и высотой h, удерживается в вертикальном положении в воде, причем ее нижний конец погружен в воду на глубину H (рис.2). Ось трубки совпадает с осью пластинки. Давление воды прижимает пластинку к трубке. До какого минимального уровня следует налить воды в трубку, чтобы пластинка отделилась от трубки? Плотность металла $\rho_м$.

8. На пробку массой $m_{пр}$ намотана проволока из алюминия. Плотность пробки $\rho_{пр} = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, алюминия $\rho_{ал}$ = $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_в$ = = $1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определите, какую наименьшую массу алюминиевой проволоки надо намотать на пробку, чтобы она вместе с проволокой полностью погрузилась в воду.

9. В калориметре находится M = = 1,5 кг воды при температуре 32 °С. Какое максимальное количество льда при температуре 0 °С нужно положить в воду, чтобы он весь растаял? Удельная теплота плавления льда $\lambda_л$ = = $3{,}2 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг · град). Теплоемкостью калориметра пренебречь.

10. В калориметр, где находится $m_л$ = = 1 кг льда при температуре t_1 = −40 °С, впускают $m_п$ = 1 кг пара при температуре t_2 = 120 °С. Определите установившуюся температуру и агрегатное состояние системы. Нагреванием калориметра пренебречь. Удельная теплоемкость льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг · град), пара $c_п$ = 2200 Дж/(кг · град), воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг · град), удельная теплота плавления льда $\lambda_л$ = = $3{,}2 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $L_в$ = = $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

11. Электрический чайник закипает через t_1 = 15 мин после включения его в сеть. Нагревательный элемент намотан из проволоки длиной 6 м. Какой длины должна быть проволока нагревательного элемента, чтобы тот же чайник закипал через t_2 = 10 мин после включения?

12. Ракета взлетает по вертикали с ускорением a = 3 м/с^2 и начальной скоростью, равной нулю. Через некоторое время t_1 двигатели прекратили работу. Звук на Земле в месте взлета перестал быть слышен спустя время t_2 = 30 с после старта. Определите скорость ракеты в момент прекращения работы двигателей. Считать скорость звука равной $v_{зв}$ = 320 м/с.

13. Система грузов, изображенная на рисунке 3, удерживается в равновесии

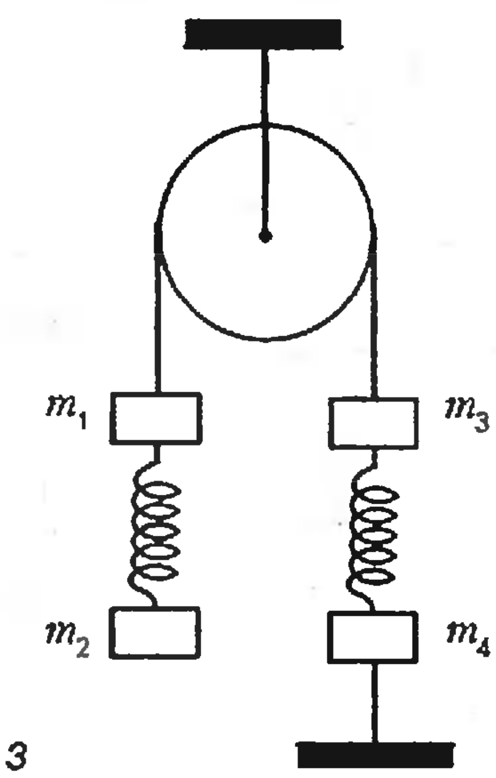


Рис. 3

с помощью нити, прикрепленной к грузу m_4. Найдите ускорения всех грузов сразу после того, как была перерезана эта нить. Считать, что нити невесомы и нерастяжимы, пружины невесомы, масса блока пренебрежимо мала, трение в подвесе отсутствует.

14. Два подвижных клина одиной и той же массы M имеют плавные переходы на горизонтальную плоскость (рис.4). С левого клина соскальзывает

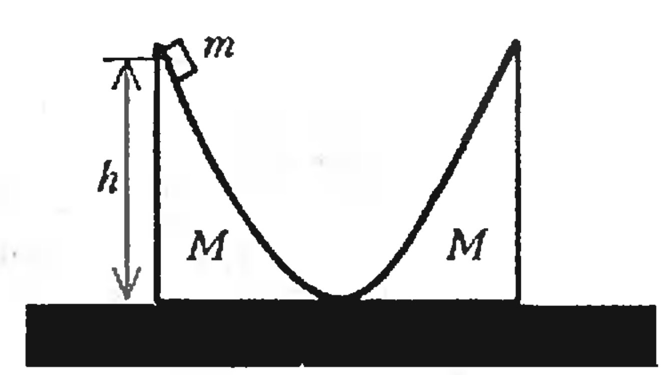


Рис. 4

шайба массой m с высоты h. На какую максимальную высоту шайба поднимется на правом клине? Трением пренебречь.

15. Давление воздуха внутри бутылки, закрытой пробкой, равно p_1 = = 10^5 Па при температуре t_1 = 7 °С. На сколько градусов нужно нагреть воздух в бутылке, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу F = 30 Н. Площадь сечения пробки S = 2 см^2.

16. В откачанном теплоизолированном цилиндре, расположенном вертикально, может перемещаться массивный поршень. В начальный момент поршень закрепляют и нижнюю часть цилиндра заполняют идеальным газом. Затем поршень освобождают. После установления равновесия объем, занимаемый газом, оказался в два раза меньше первоначального. Во сколько раз изменилась температура газа? Молярную теплоемкость газа при постоянном объеме принять равной $C_V = 5R/2$.

17. В сосуд объемом $V = 10$ дм^3, наполненный сухим воздухом при давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t_0 = 0$ °С, вводят $m = 3$ г воды. Сосуд нагревают до температуры $t = 100$ °С. Каково давление влажного воздуха при этой температуре?

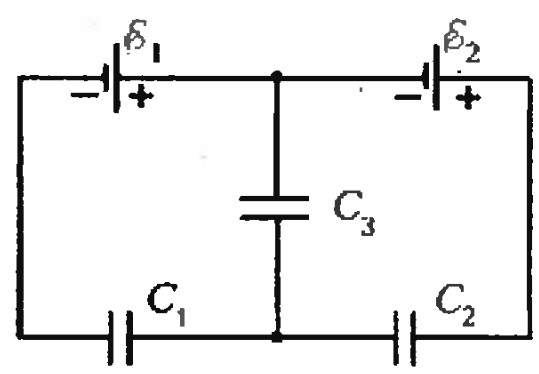


Рис. 5

18. Найдите заряд на каждом конденсаторе, схема соединения которых изображена на рисунке 5 ($C_1 = C$, $C_2 = C$, $C_3 = 2C$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$).

Вступительное задание ЗФТШ по математике

1. Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал 20% всего пути и еще 60 км, во второй $-1/4$ всего пути и еще 20 км, а в третий день $-$ 23/80 всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

2. Коза и корова съедают воз сена за 45 дней, корова и овца — за 60 дней, овца и коза — за 90 дней. За сколько дней съедят воз сена коза, овца и корова вместе?

3. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 7, то и каждое из них делится на 7.

4. На плоскости проведены три прямые, каждая из которых пересекается по крайней мере с одной из двух остальных. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

5. Несколько ящиков весят вместе 10 тонн, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

6. Найдите сумму отмеченных углов пятиконечной звезды (рис.6).

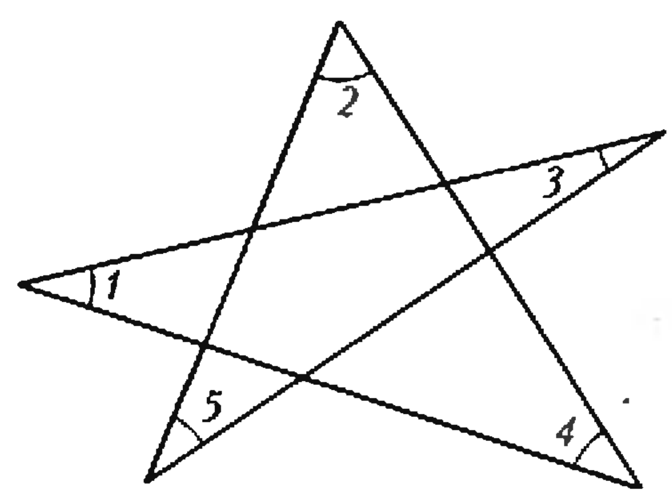


Рис. 6

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

8. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получается из 1 тонны молока?

9. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} \ge a$$

является верным при всех значениях x.

10. Из всех треугольников с данным основанием a и данным углом при вершине α найдите треугольник с наибольшей биссектрисой, проведенной к основанию.

11. Решите неравенство

$$\frac{|x+2|-|x-1|}{\sqrt{8-x^2-2x}} \ge 1.$$

12. В трапеции $ABCD$ сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC. Окружность касается стороны AB в точке K, лежащей между точками A и B, имеет с отрезком BC единственную общую точку C, проходит через точку D и пересекает отрезок AD в точке E ($E \ne D$). Найдите расстояние от точки K до прямой CD, если $AD = 48$, $BC = 12$.

13. Решите уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x.$$

14. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна 6, сумма третьих членов равна 2, а сумма пятых членов равна (-2). Найдите разность арифметической прогрессии.

НОВЫЙ ПРИЕМ В ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТЫ ПРИ УНИВЕРСИТЕТАХ

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно — СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Обучение ведется на двух отделениях: физико-математическом и химико-биологическом. В составе физико-математического отделения кроме основного профиля предлагаются компьютерно-информационный, биофизический (СУНЦ МГУ) и экономический. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур — заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению приемной комиссии в апреле — мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приведены условия заочного вступительного экзамена.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе укажите желаемый профиль обучения).

На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью).
2. Домашний адрес (подробный), индекс.
3. Подробное название школы, класс.

Работу отправляйте простой бандеролью (обязательно вложите в работу конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес).

Высылайте Вашу работу по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен (внимание: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития, телефон для справок 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ — не позднее 20 марта 1998 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если Вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

Основное задание

Математика

9 класс

1. При каких натуральных n число $n^2 + 17n - 2$ делится а) на 11; б) на 121?

2. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и CD равны, а стороны AB и AD не равны. Диагональ AC, равная 8 см, является биссектрисой угла BAD, равного 45°. Найдите $AB + AD$.

3. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 - xyz = 2, \\ y^3 - xyz = -9, \\ z^3 - xyz = 7. \end{cases}$$

4. Разрежьте равносторонний треугольник на 5 попарно различных равнобедренных треугольников.

5. Нарисуйте множество всех таких точек координатной плоскости, из которых к параболе $y = 2x^2$ можно провести две перпендикулярные друг другу касательные.

10 класс

1. В каких пределах может меняться длина отрезка NM с концами на сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC единичной площади при условии, что точки M и N равноудалены от середины стороны AC, а отрезок NM не параллелен AC?

2. Ученик последовательно возводит в квадрат четырехзначные числа: 1000^2, 1001^2, 1002^2, ... и стирает у каждого из полученных квадратов три последние цифры. До какого момента у него будет получаться арифметическая прогрессия?

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Докажите, что для произвольных α, β и γ выполняется неравенство

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le 1.$$

Физика

9 класс

1. Пассажир первого вагона прогуливался по перрону. Когда он был у последнего вагона, поезд начал двигаться с ускорением a. Пассажир сразу же побежал к своему вагону. С какой наименьшей скоростью он должен бежать, чтобы успеть сесть в первый вагон? Длина поезда l.

2. Если к пружине длиной $l_0 = 0{,}1$ м в ненапряженном состоянии подвесить груз, то ее длина станет $l = 0{,}15$ м. Груз подняли так, что пружина оказалась нерастянутой, и отпустили с нулевой начальной скоростью. До какой максимальной длины растянется пружина?

3. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой M. На доске находится тело массой m, которому сообщают начальную скорость v. Коэффициент трения между телом и доской μ. На какое расстояние сместится тело относительно доски?

4. Расстояние от поверхности воды до центра сферы радиусом R равно H ($H > R$). Величина силы, действующей на нижнюю поверхность сферы со стороны воды, равна $F = (p_{ат} + \rho_в gH)\pi R^2 + 2\pi R^3\rho_в g/3$, где $p_{ат}$ — атмосферное давление, $\rho_в$ — плотность воды. Найдите величину силы, действующей на верхнюю поверхность сферы. Объем сферы $V = 4\pi R^3/3$.

5. К точкам a и b, разность потенциалов между которыми U, подключены последовательно вольтметр с внутренним сопротивлением r и резистор (рис.1). Показание вольтметра $U_в = U \cdot 10^{-n}$. Найдите сопротивление резистора.

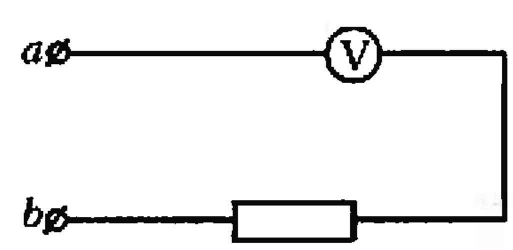


Рис. 1

10 класс

1. В реакции $XY_2 = X + 2Y$ все вещества являются идеальными газами. Сосуд объемом $V = 22{,}4$ л вначале содержал $\nu_1 = 1$ моль вещества XY_2. Затем в сосуд ввели катализатор разложения. После достижения равновесия температура смеси равна $T_0 = 273$ К, давление составляет $p = 2p_0$, где p_0 — нормальное давление. Найдите количество молей ν_2 прореагировавшего вещества XY_2.

2. Найдите отношение подъемных сил, действующих на равные объемы водорода и гелия при одинаковых условиях.

3. В четырех точках замкнутой, нерастяжимой и непроводящей нити на равных расстояниях закреплены четыре одноименных заряда Q, q, Q и q. В положении равновесия нить принимает форму ромба. Найдите угол ромба при вершине Q.

4. Ребра тетраэдра $ABCD$ представляют собой проводящий контур-каркас, изготовленный из однородной проволоки. Сопротивление ребра $R_0 = 1$ Ом. К вершинам каркаса A и B приложено постоянное напряжение $U = 1$ В. Найдите мощность, потребляемую контуром.

5. В схеме на рисунке 2 емкости конденсаторов $C_1 = 3C$, $C_2 = 2C$, ЭДС батареи $\mathcal{E}$. Найдите количество теплоты, которое выделится в батарее после замыкания ключа.

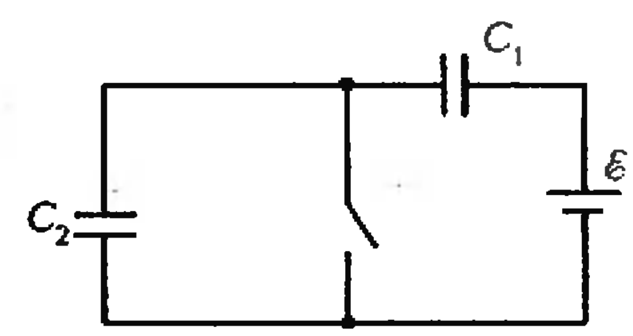


Рис. 2

Дополнительные задачи по химии для поступающих на химико-биологическое отделение

1. При обработке избытком 20%-й соляной кислоты 24,0 г порошка A выделилось около 4,45 л газа B с резким запахом (при н.у.). Раствор перманганата калия обесцвечивается при пропускании газа B. 1) Какой состав мог иметь порошок A? 2) Приведите три возможные формулы, описывающие количественный состав порошка A. 3) Сколько мл раствора перманганата калия с концентрацией 0,1 моль/л могло обесцветиться при пропускании всего выделившегося газа B?

2. Какие реакции и при каких условиях могут происходить между: а) металлическим магнием и нитратом серебра; б) сульфитом железа (II) и серной кислотой; в) гидроксидом рубидия и бромом? Напишите уравнения всех возможных, по Вашему мнению, реакций для каждой пары веществ. Укажите условия проведения каждой из реакций.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. Из условия задачи следует, что 15 генералов получили ордена третьей степени, 8 генералов — еще и ордена второй степени и 3 генерала — ордена первой степени. Всего было вручено 15 + 8 + 3 = 26 орденов.

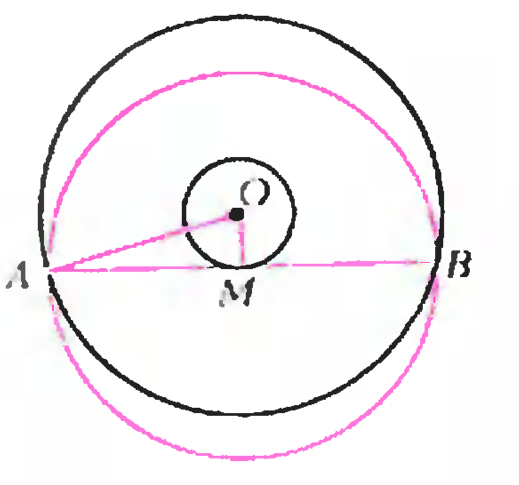


Рис. 1

2. Пусть O — центр двух первых окружностей, AB — указанная в задаче хорда и M — ее середина (рис.1). В прямоугольном треугольнике AMO отрезок AO — радиус одной из первых окружностей, OM — радиус второй окружности, а AM — радиус третьей окружности. По теореме Пифагора $OM^2 = AO^2 - OM^2$. Умножив это равенство на π, получим $\pi OM^2 = \pi AO^2 - \pi OM^2$. В левой части этого равенства стоит площадь третьего круга, а в правой — разность площадей первых двух кругов, т.е. площадь кольца, образованного первыми двумя окружностями.

3. 8739 + 8739 = 17478.

4. Наибольшее простое число, меньшее 15, равно 13, а наименьшее простое число, большее 15, равно 17. Осталось заметить, что наибольшее простое число, меньшее 17, вновь 13, а наименьшее простое число, большее 13, также 17, как и для числа 15. Отсюда следует, что искомая сумма равна 65.

5. Первое число может оканчиваться лишь на 11, 12, 21 и 22, а второе — лишь на 33, 34, 43 или 44. Проверив все случаи перемножения, легко убедиться, что у произведения две последние цифры никогда не будут равны.

(см. «Квант» №6)

1. Пусть К.Горовой дал x долларов и x центов. Заметим, что x не больше 99. Тогда К.Моровой дал $x + 3$ доллара и $x/8$ центов. Отсюда следует, что x делится на 8. Значит, $x = 8y$, где y не превосходит 12. В сумме эти двое оказали помощь в размере $16y + 3$ доллара и $9y$ центов, т.е. $1609y + 300$ центов. Так как это число представляется в виде $7(230y + 43) - (y + 1)$, то $y + 1$ должно делиться на 7, чтобы вся сумма делилась на 7. (Вспомним, что К.Хоровой заплатил ровно в 7 раз меньше, чем первые двое.) Среди чисел y в пределах от 1 до 12 этому условию удовлетворяет только число 6. Поэтому $x = 48$. Окончательно получаем, что первый дал 48 долларов и 48 центов, второй — 51 доллар и 6 центов, третий — 14 долларов и 22 цента, а всего — 113 долларов и 76 центов.

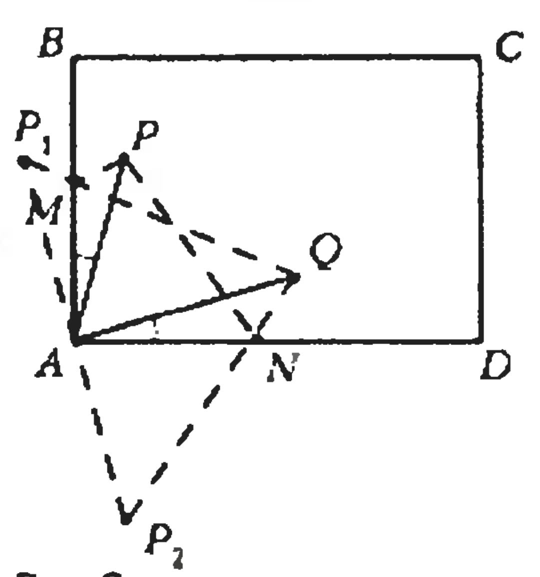


Рис. 2

2. Точку P симметрично отразим от бортов AB и AD. Получим точки P_1 и P_2. Очевидно, что $AP_1 = AP_2 = AP$. Длина пути PMQ, очевидно, равна длине отрезка QP_1, а длина пути PNQ равна длине отрезка QP_2 (рис.2). Теперь из равенства углов PAB и QAD следует, что углы QAP_1 и QAP_2 — прямые, следовательно, треугольники AP_1Q и AP_2Q равны. Получаем, что $P_1Q = P_2Q$, следовательно, указанные в задаче пути равны.

3. Здесь использована римская нумерация со следующей кодировкой символов: I — ○, V — △, X — □, C — ☆, M — ▽. Таким образом, запись в условии задачи означает MCMXCVII, или число 1997.

4. Первоначально может показаться, что время «кругосветного путешествия» точки M равно 6 секундам, но следует заметить, что стержень «заставляет» точку M трижды совершать

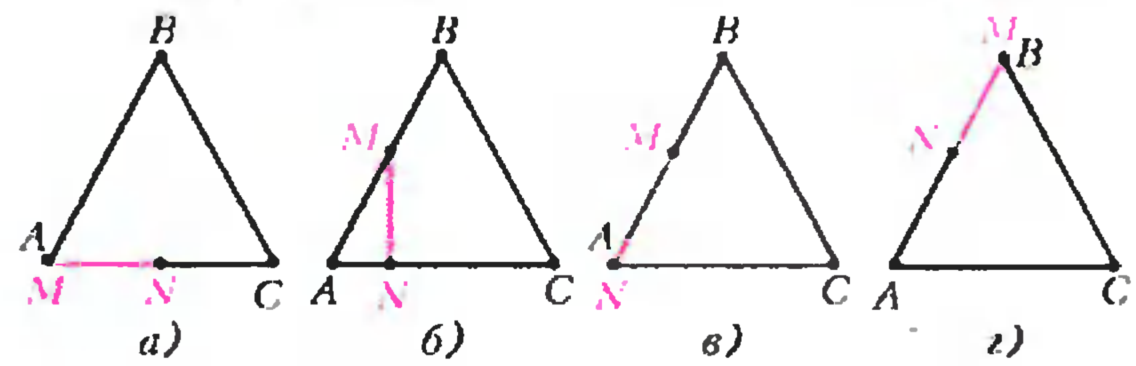


Рис. 3

«попятное» движение. Рассмотрим движение точки M от точки A до точки B. На рисунке 3 показаны узловые моменты этого движения. Из положения *а* в положение *б* точка M проходит отрезок, равный $2/\sqrt{3}$. Далее в положение *в* точка M проходит попятно отрезок длиной $2/\sqrt{3} - 1$ и, наконец, точка M попадает в точку B, пройдя отрезок длиной 1. Таким образом, путь из A в B точка M проходит за $4/\sqrt{3}$ секунд, а полный оборот делает за втрое большее время, т.е. за $4\sqrt{3}$ секунд.

5. Так как в волейболе ничьих не бывает, то не имеют побед те команды, которые проиграли всем остальным. Но это может быть лишь одна команда, так как если бы их было две или больше, то кто-то из них победил во встрече между собой. Значит, 20% команд составляет ровно одна команда и всего было 5 команд.

СКВОЗЬ РОЗОВЫЕ ОЧКИ

1. Не получит. Дальнозоркость.
2. Зеленого.
3. Нет. Черного.
4. Вызывает — выпуклость стекол очков не соответствует близорукости.
5. Глаз человека видит в пределах угла около 120°. Поле зрения глаза зайца — почти 180°, так что поля зрения обоих глаз почти смыкаются спереди и сзади и непосредственно перед собой заяц почти не видит.
6. Вероятно, близорукость.
7. Двойные стекла дают два отражения лампы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТАМОРФОЗЫ

1. Докажите, что $AQKC$ и $BQMD$ — параллелограммы.

2. По свойству спирального подобия, доказанному в статье, все треугольники QAB, где Q — вторая точка пересечения окружностей, подобны между собой. Поэтому и треугольники QAM, где M — середина AB, подобны между собой. Отсюда следует, что каждая из рассматриваемых точек M получается из соответствующей точки A при фиксированном спиральном подобии с центром Q. А так как точка A пробегает окружность, Q, ее образ при этом подобии, также пробегает окружность. Это рассуждение позволяет легко найти положение центра и радиус этой окружности.

3. Спиральное подобие с центром Q, переводящее одну окружность в другую (а точку A в B), переводит и первую касательную во вторую. Поэтому угол между касательными ($\angle AMB$ или смежный с ним) равен углу поворота этого подобия, т.е. углу AQB. Отсюда с помощью свойства вписанного угла (точнее, обратной к нему теоремы) и выводится утверждение задачи. Подчеркнем, что аккуратное доказательство требует рассмотрения различных расположений точек или использования ориентированных углов.

4. Теорема о прямой Гаусса непосредственно сводится к теореме о диагоналях параллелограммов, рассмотренной в статье. Чтобы сохранить обозначения, принятые в статье, обозначим данный четырехугольник $NBJM$. А теперь достроим его до чертежа на рисунке 12 в статье: продолжим NB и JM до пересечения в K, а NM и BJ — до пересечения в D. Достроим параллелограммы $BNMA$ и $KNDC$ (рис.4). При гомотетии с центром N и коэффициентом 2 середины диагоналей BM и NJ нашего четырехугольника перейдут, соответственно, в точки A и J, а середина отрезка KD — в точку C. Остается заметить, что по «теореме о диагоналях» AC проходит через J, значит, и рассматриваемые середины отрезков лежат на одной прямой.

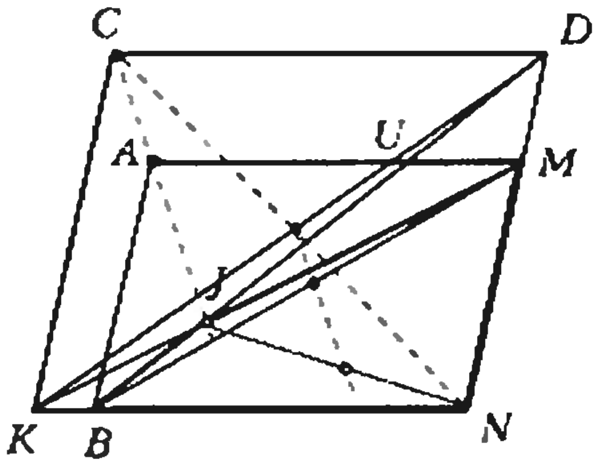


Рис. 4

5. В обозначениях рисунка 14 в статье оба взаимно двойственных утверждения сводятся к одному и тому же факту: прямая, соединяющая точку пересечения $a = AB'$ и $b' = A'C$ с точкой пересечения $a' = AC'$ и $b = A'C$, проходит через точку пересечения прямых BC' и $B'C$. Относительно второго вопроса задачи укажем лишь, что прямым a, b, c, a', b', c' на рисунке 14 отвечают, соответственно, прямые KC, BP, ND, LM, CD, KN на рисунке 12, а один чертеж превращается в другой при центральной проекции, отправляющей A и A' на бесконечность.

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. $v_{\min} = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi\varepsilon_0 ml}}$.

2. $v = \sqrt{v_0^2 + 2ql\mathcal{E}/(md)}$.

3. $F_{\max} = \pi r^3 AB_0/R$.

4. $B = g\sqrt{mL}/(v_0 l)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(1; -1/2) \cup (-1/4; 0) \cup (0; 1)$.

2. $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. 12. Пусть $\angle CAK = \alpha$, $\angle KBC = \beta$ (рис. 5). Это углы между касательной к окружности и хордам AK и KB соответственно. Так как углы KBA и KAB опираются на дуги AK и KB соответственно, то $\angle KAB = \beta$, $\angle ABK = \alpha$. Из треугольников AKN и AKM находим $KM = KN\sin\beta/\sin\alpha$ (1). Аналогично, из треугольников KMB и KBL получаем $KM = KL\sin\alpha/\sin\beta$ (2). Перемножая равенства (1) и (2), получаем $KM^2 = KN \cdot KL$.

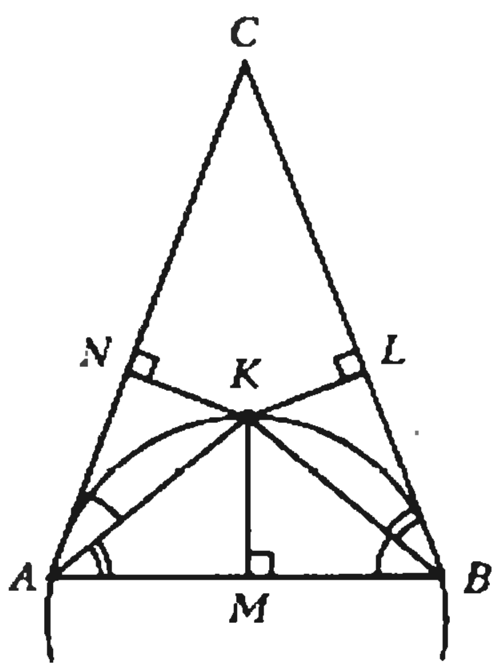


Рис. 5

4. $a = -6$, $b = -11$, $c = -6$. Пусть $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, а $A = (x_1, y_0)$, $B = (x_2, y_0)$. Поскольку точки A и B симметричны относительно прямой $x = -2$, то существует такое $t > 0$, что $A = (-2 - t; y_0)$, $B = (-2 + t, y_0)$. По условию $f'(-2-t) = f'(-2+t)$, откуда $a = -6$. При этом $f'(x_1) = f'(x_2) = -3t^2 + 12 + b$ (1). Равенство $y_0 = f(x_1) = f(x_2)$ принимает вид $(2+t)^3 - 6(2+t)^2 - b(2+t) = (2-t)^3 - 6(2-t)^2 + b(t-2)$, и из него находим $b = -12 + t^2$ (2). Подставляя (2) в (1), получим $f'(x_1) = f'(x_2) = -2t^2 < 0$ (3), поэтому прямая, проходящая через точку A, лежит правее прямой, проходящей через точку B, и уравнения соответствующих прямых таковы: A: $y = y_0 - 2t^2(x - (-2 - t))$; B: $y = y_0 - 2t^2(x - (-2 + t))$. Подставляя в эти уравнения $x = 0$, получим систему: $y_0 - 2t^2((2 + t)) = -6$, $y_0 - 2t^2((2 - t)) = 2$ (5). Из (5) найдем $t = 1$, $y_0 = 0$. Из (3) найдем, что $b = -11$, а из равенства $y_0 = 0$ получим, что $c = -6$.

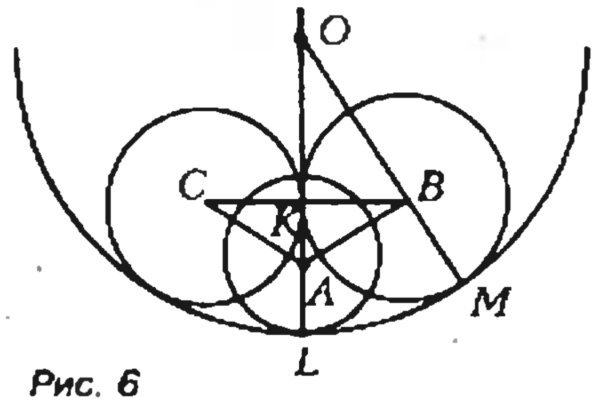


Рис. 6

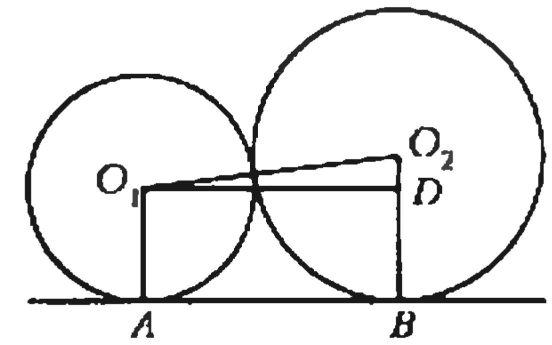


Рис. 7

5. $9r/4$. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры шаров, через A, B, C — их проекции на основание цилиндра, через O — центр основания цилиндра (рис. 6, 7). На рисунке 7 отрезок O_1D перпендикулярен O_2B, $O_1O_2 = 3r/2$, $O_2D = r/2$. Из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2D получим $O_1D^2 = (3r/2)^2 - (r/2)^2 = 2r^2 = AB^2$. Пусть $OL = OM = x$ (см. рис.6), тогда $OK = OL - AL - AK = x - 3r/2$, $OB = OM - BM = x - r$, а из треугольника ABK имеем $AK^2 = AB^2 - BK^2 = r^2$. Теперь теорема Пифагора для треугольника OKB дает $OK^2 = OB^2 - BK^2$, т.е. $(x - 3r/2)^2 = (x - r)^2 - r^2$. Решая это уравнение, получим ответ.

Вариант 2

1. $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $x \le -4$, $1 \le x < 3$, $x > 5$.

3. $2/3$, $3\sqrt{7}/20$. Из условия задачи $EC = ED$ (рис.8), т.е. $\angle ADE = \angle CDE = \angle ECD = \angle BCD = \alpha$, откуда $ED \parallel BC$ и $\angle DBC = \alpha$. Треугольники DEC и DBC подобны, поэтому $CD = \sqrt{EC \cdot CB} = 2/3$. Далее, $\cos\alpha = CB/(2CD) = 3/4$, $S = (CB \cdot AB\sin 2\alpha)/2$. Сторону AB найдем из теоремы синусов: $AB/\sin 2\alpha = CB/\sin 3\alpha$.

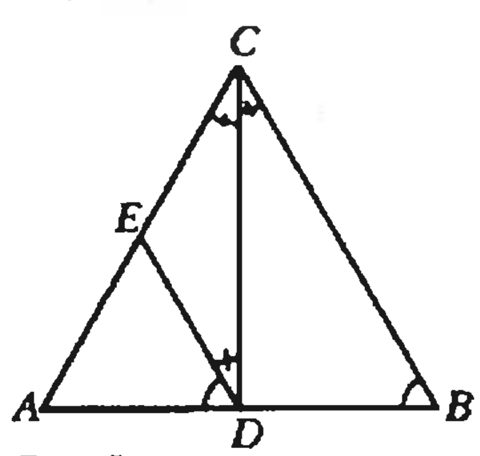


Рис. 8

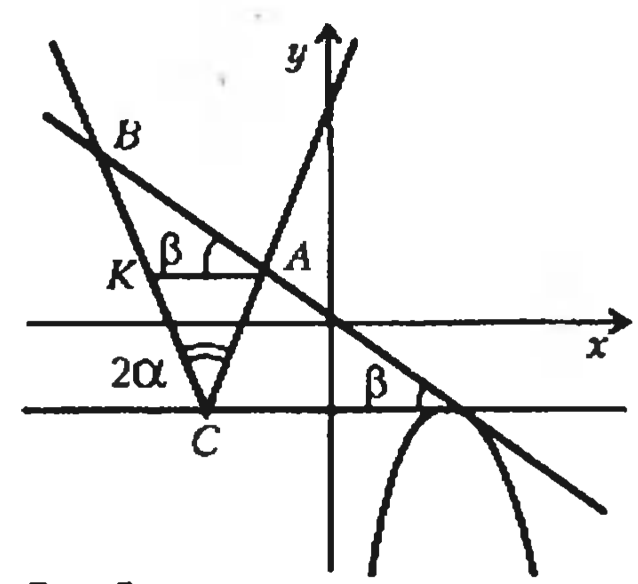


Рис. 9

4. $R = 13\sqrt{10}/16$. В треугольнике ABC через точку A проведем прямую, параллельную оси Ox и пересекающую сторону BC в точке K (рис.9). Пусть $\angle BAK = \beta$, $\angle C = 2\alpha$. Тогда $\angle A = \beta - \alpha + \pi/2$, $\angle B = \pi/2 - \beta - \alpha$. По условию $\angle A - \angle B = 2\beta$, отсюда $\beta = \arccos 3/\sqrt{10}$, и тангенс угла наклона касательной равен $-1/3$. Найдем точку касания: $y'(x_0) = -x_0/6 + 1 = -1/3$, т.е. $x_0 = 8$, $y(x_0) = -8/3$. Уравнение касательной имеет вид: $y = -(x - 8)/3 - 8/3 = -x/3$. Из уравнения $-x/3 = 3|x + 6| - 7/3$ найдем абсциссы точек A и B: $x_1 = -61/8$, $x_2 = -47/10$. Длина проекции стороны AB на ось Ox равна $|x_1 - x_2| = 117/40$. Поэтому $AB = |x_1 - x_2|/\cos\beta = 39/4\sqrt{10}$. Пусть R — радиус

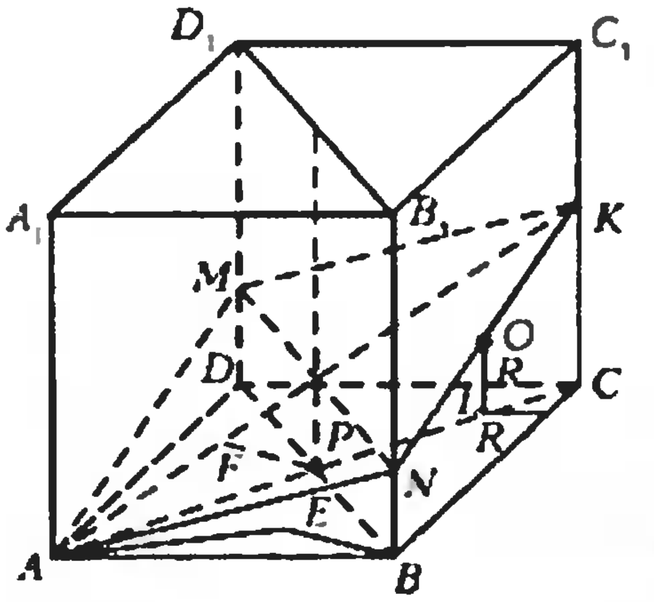


Рис. 10

описанной окружности. По теореме синусов $R = AB/(2\sin 2\alpha)$.

5. $S_{AMKN} = 2a^2/\sqrt{3}$, $R = a\sqrt{2}/\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. Пусть M, K, N — (соответственно) точки пересечения ребер DD_1, CC_1, BB_1 с искомым сечением (рис.10). Пусть, далее, BE — перпендикуляр к плоскости сечения. Тогда из треугольника AEB имеем $EB = a\sqrt{2}/4$, так как $\angle BAE = \arcsin\sqrt{2}/4$ и $AD = a$. Из точки P пересечения диагоналей AC и BD опустим перпендикуляр PF на AK, тогда $PF = BE$ ($BD \parallel ANM$). Из треугольника APF получим

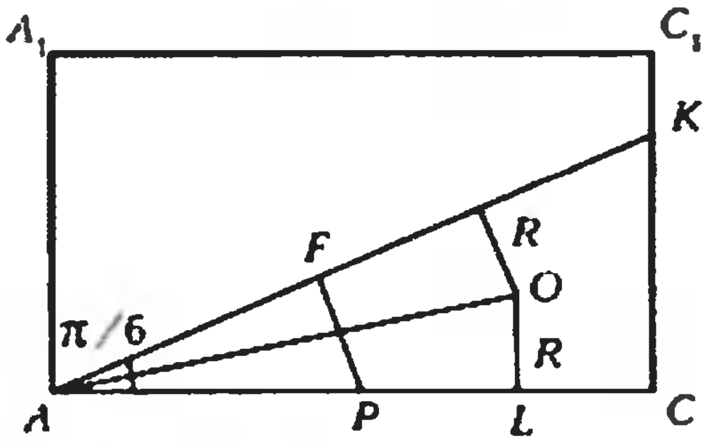


Рис. 11

($AP = a\sqrt{2}/2$) $\angle PAF = \pi/6$, т.е. $AK = AC/\cos(\pi/6) = 2\sqrt{6}a/3$ $S_{AMKN} = (AK \cdot MN)/2 = 2a^2\sqrt{3}/3$. Осталось найти радиус R вписанного шара, центр которого O лежит на биссектрисе угла KAC. Точка L (проекция O на ABC, рис.10, 11) лежит на AC. Поскольку при этом $LC = R\sqrt{2}$ и $AL = R\,\mathrm{ctg}(\pi/12)$, из равенства $AC = AL + LC$ получим $R\left(\mathrm{ctg}(\pi/12)+\sqrt{2}\right) = a\sqrt{2}$. $\mathrm{ctg}(\pi/12) = \left(1+\cos(\pi/6)\right)/\sin(\pi/6) = -\sqrt{3}$.

Вариант 3

1. $x = 9$. *Указание*. Выполните подстановку: $t = x - 2\sqrt{x}$.

2. $x = -\pi/4 + (-1)^k \pi/12 + \pi k/2 + \pi n$,

$y = -\pi/4 - (-1)^k \pi/12 - \pi k/2 + \pi n, n \in Z$.

Указание. Решите систему относительно $\cos x \sin y$, $\sin x \cos y$, а затем вычислите $\sin(x-y)$, $\sin(x+y)$.

3. $7/6$. Пусть R, a, x — радиус окружности, сторона ромба и длина стороны треугольника (рис.12, 13). Обозначим острый угол ромба через 2α, тогда $2R = a\sin 2\alpha$. Так как две стороны треугольника параллельны диагоналям ромба, то этот треугольник прямоугольный, а из параллельности

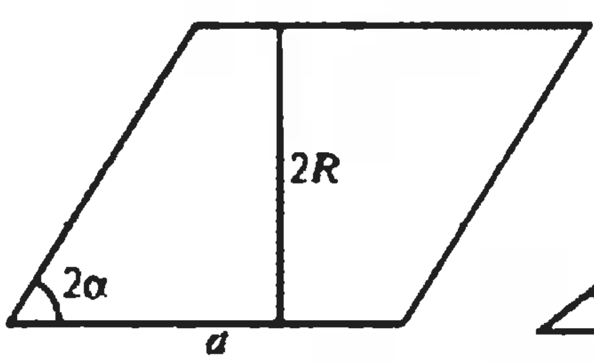


Рис. 12

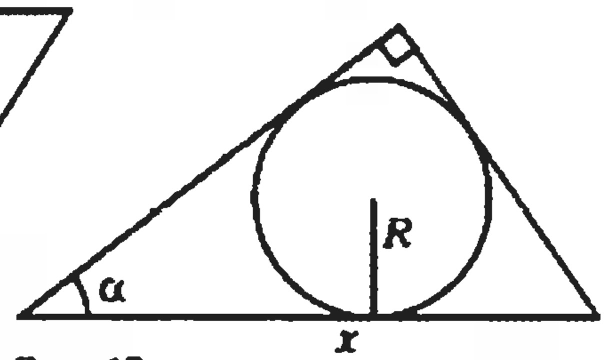


Рис. 13

третьей стороны треугольника стороне ромба следует, что один из углов этого треугольника равен α. Формула $S = pR = x^2\sin\alpha\cos\alpha/2$ дает второе уравнение $R(1+\cos\alpha+\sin\alpha) = x\sin\alpha\cos\alpha$. Откуда $R = x^2/2a - x$.

4. 18, $73/6$. Так как указанные в условии числа равны длинам сторон треугольника, то эти числа положительны и удовлетворяют неравенству треугольника: $3x > 0$, $2y > 0$, $9 - y > 0$, $3x + 2y > 9 - y$, $3x + 9 - y > 2y$, $2y + 9 - y > 3x$. Фигура $M = \{y < x + 3,\ y > 3 - x,\ y > 3x - 9\}$ — треугольник с вершинами $(0; 3)$, $(3; 0)$, $(6; 9)$. Второе условие задачи дает неравенство (отрицательность дискриминанта данного в условии квадратного трехчлена): $y < 3 + 4x - x^2$. Площади фигур (рис.14) вычисляются стандартным образом.

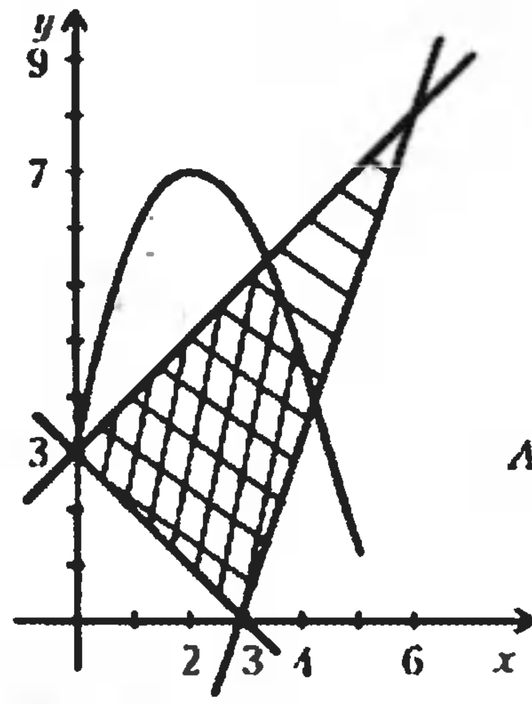


Рис. 14

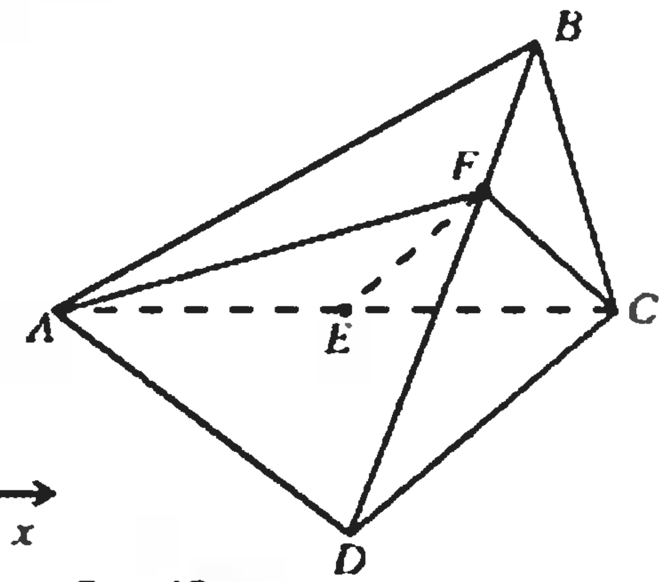


Рис. 15

5. a, $\pi/4$, $\pi/4$. Пусть прямая AF (рис.15) перпендикулярна BD, тогда прямая BD перпендикулярна плоскости ACF (BD перпендикулярна прямой AF по построению, а прямой AC по условию). Итак, EF — медиана и биссектриса треугольника AFC, поэтому $AF = FC$ и $AD = DC = a$. По условию угол ACF равен $\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)$; $AE = AF\cos\angle ACF = AD\cos\angle CAD$, $AF = AD\sin\angle ADF$ и $\cos\angle CAD = \cos\angle ACF \sin\angle ADF = \sqrt{2/3}\sqrt{3}/2 = 1/\sqrt{2}$. Угол между ребром DB и гранью ACB равен $\angle BDE$. Найдем этот угол: $EF = DF\,\mathrm{tg}\angle BDE = AF\sin\angle ACF$, $AF = DF\,\mathrm{tg}\angle ADF$, поэтому $\mathrm{tg}\angle BDE = \sin\angle ACF\,\mathrm{tg}\angle ADF = \left(1/\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 1$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Обозначим скорость коробки сразу после вылета из нее пули через v. На основании закона сохранения импульса можно записать

$$mv_0 = \frac{1}{3}mv_0 + 5mv.$$

Отсюда

$$v = \frac{2}{15}v_0.$$

Расстояние, на которое переместится коробка, обозначим через s. За время движения коробки ее кинетическая энергия будет израсходована на работу против сил трения, поэтому

$$s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{2}{225}\frac{v_0^2}{\mu g}.$$

2. Обозначим давление насыщенного пара при температуре $t_0 = 110$ °C ($T_0 = 383$ K) через $p_н$. При медленном изотермическом увеличении объема на ΔV пар совершил работу $A = p_н\Delta V$. Отсюда

$$p_н = \frac{A}{\Delta V} = 1{,}5 \text{ атм}.$$

Обозначим объем цилиндра под поршнем через V_0. Запишем уравнения состояния насыщенного пара в начальном и конечном состояниях:

$$p_н(V_0 - 0{,}001V_0) = \frac{m_1}{M}RT_0,$$

$$p_н(V_0 + \Delta V) = \frac{m_2}{M}RT_0,$$

где m_1 — масса пара в исходном состоянии, M — молярная масса пара, m_2 — масса пара в конечном состоянии. Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$p_н\Delta V + p_н \cdot 0{,}001V_0 = \frac{m_2 - m_1}{M} RT_0 .$$

Пренебрегая вторым членом в левой части этого уравнения и учитывая, что $m_2 - m_1 = m_в$, где $m_в$ — масса воды, получим

$$m_в \approx \frac{Mp_н\Delta V}{RT_0} = \frac{MA}{RT_0} = 10^{-3} \text{ кг}.$$

Отсюда можно найти объем цилиндра:

$$V_0 = \frac{m_в}{\rho_в \cdot 0{,}001} = 1 \text{ л}$$

и массу пара в исходном состоянии:

$$m_1 = \frac{Mp_н(V_0 - 0{,}001V_0)}{RT_0} \approx \frac{Mp_нV_0}{RT_0} = \frac{MAV_0}{RT_0\Delta V} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ кг}.$$

3. Сразу после замыкания ключа разность потенциалов на конденсаторе емкостью C_0 равна нулю, а падение напряжения на резисторе равно $\mathcal{E}$. Поэтому ток в цепи сразу после замыкания ключа будет

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

В произвольный момент времени t (после замыкания ключа) напряжение на конденсаторе будет равно

$$U_C = \frac{q(t)}{C(t)} = \mathcal{E} - I(t)R.$$

Пусть через время t_0 ток в цепи достигает значения $I_0 = \Delta q/\Delta t$ и в дальнейшем остается постоянным. Следовательно, изменение заряда на конденсаторе равно

$$\Delta q = I_0\Delta t,$$

а заряд на конденсаторе изменяется со временем (при $t > t_0$) по закону

$$q_C(t) = q_0 + I_0(t - t_0) = (\mathcal{E} - I_0R)C(t).$$

Чтобы ток оставался постоянным, необходимо изменять емкость по закону

$$C(t) = \frac{q_0}{\mathcal{E} - I_0R} + \frac{I_0(t - t_0)}{\mathcal{E} - I_0R}.$$

Поскольку при $t \le t_0$

$$C(t) = C_0, \text{ или } C_0 = \frac{q_0}{\mathcal{E} - I_0R},$$

окончательно для зависимости емкости конденсатора от времени получаем

$$C(t) = C_0 + \frac{I_0}{\mathcal{E} - I_0R}(t - t_0) \text{ при } t \ge t_0.$$

4. Так как показатель преломления в нашем случае зависит только от координаты y, среду можно считать плоскослоистой. Если луч света проходит такую среду насквозь, то можно показать, что угол входа α (угол падения) и угол выхода β (угол преломления) связаны соотношением

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n(H)}{n(0)},$$

где $n(0)$ — показатель преломления среды на входе луча, а $n(H)$ — показатель преломления на выходе луча. В том случае, когда луч не проходит среду насквозь, а испытывает полное внутреннее отражение на некотором расстоянии h от плоскости входа, для угла падения α_0 получаем

$$\sin\alpha_0 = \frac{n(h)}{n(0)},$$

где $n(h)$ — показатель преломления среды на глубине h. Используя заданную зависимость показателя преломления $n(y)$, получим

$$h = \frac{n_0}{k}(1 - \sin\alpha_0) = 1 \text{ м}.$$

5. Будем рассматривать движение заряженной частицы в системе координат XY, где ось X направлена вдоль скорости $\vec{v}_0$, а ось Y — вдоль вектора $\vec{E}$ (рис.16). Уравнение движения частицы вдоль оси X имеет вид

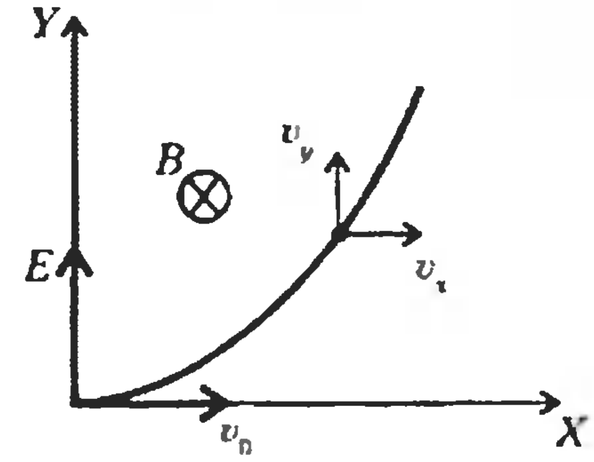


Рис. 16

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -qBv_y,$$

или

$$\Delta v_x = -\frac{qB}{m}v_y\Delta t = -\omega_0 v_y\Delta t,$$

где ω_0 — так называемая циклотронная частота. Поскольку $v_y\Delta t = \Delta y$, то $\Delta v_x = -\omega_0\Delta y$. Отсюда

$$\int_{v_0}^{v_x}\Delta v_x = -\omega_0\int_0^y \Delta y, \text{ или } v_x = v_0 - \omega y.$$

Закон сохранения энергии позволяет записать

$$\frac{mv_0^2}{2} + qEy = \frac{mv_x^2}{2}.$$

Из совместного решения двух уравнений (исключая y) получим квадратное уравнение относительно v_x:

$$v_x^2 + 2v_0v_x - 3v_0^2 = 0,$$

откуда окончательно находим

$$v_x = -v_0 - \sqrt{v_0^2 + 3v_0^2} = -3v_0.$$

Вариант 2

1. $v_0 = g\tau/2$. **2.** $\rho = \dfrac{Mmg_н}{4\pi R_н^2RT} = 6{,}6$ кг/м^3.

3. $Q_2 = Q_1R_1/R_2$; $\mathcal{E} = \sqrt{2Q_1(R_1 + R_2)/(LR_1)}R_3$.

4. $\sigma_x = \dfrac{2\varepsilon_0(1-\alpha)^2mg}{\alpha^2q}$. **5.** $\alpha = \arccos\dfrac{2a + \Delta l}{Da(a + \Delta l)} = \arccos 0{,}9$.

Вариант 3

1. $\Delta V = 2R\Delta T/p_0 = 16{,}6 \cdot 10^{-3}$ л; $T = \Delta T/\alpha = 400$ К.

2. $v_1 = 2\sqrt{gH}$; $v_2 = \sqrt{10gH/3}$.

3. $M = \rho_вd^3(1 - \pi/4)(1 - m/(\rho_вd^3)) = 160$ г;

$\rho = \rho_в - m/d^3 = 0{,}75$ г/см^3.

4. $a = v_0l^2B^2/(MR)$. **5.** $\lambda_0 = \dfrac{\beta - \alpha}{\beta - 1}\dfrac{hc}{A} = 0{,}33$ мкм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 60 км/ч. **2.** $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.** 1; $\log_2 2/5$.

4. 2048. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что высота пирамиды — ребро SC — равна удвоенному расстоянию от центра описанной сферы до плоскости ABC.

5. $[-2; 1/4]$. *Указание.* Сложив неравенства системы, получим после преобразований неравенство $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \le (1 - 4a)/2$ (*), решения которого образуют при $a \le 1/4$ круг с центром в точке $(1/2; 1/2)$ и радиусом $\sqrt{(1 - 4a)/2}$ (при $a = 1/4$ круг превращается в точку, а при $a > 1/4$ решений нет).

Наиболее удаленной от начала координат точкой круга является точка $L(x_0, y_0)$, для которой $x_0 = y_0 = \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$. Эта точка удовлетворяет исходной системе неравенств при любом $a \le 1/4$, поэтому осталось решить неравенство $2x_0^2 \le 8$.

Вариант 2

1. $x_1 = 2a-3$, $x_2 = 2$ при $a \ne 1$; 2; 5/2; 3;
$x = 2$ при $a = 2$; $5/2$;
$x = -1$ при $a = 1$;
$x = 3$ при $a = 3$.

2. 2; 1024. **3.** $\frac{\pi}{12}(8n-1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. 28. *Указание.* Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, по формуле $R = abc/4s$, примененной к одному из треугольников, образованных диагональю, основанием и боковой стороной трапеции; высоту пирамиды — по теореме Пифагора и площадь трапеции — по стандартной формуле.

5. Если $a = 5$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x_2 = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{6}-1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Уравнение имеет решения при $-3\sqrt{3} \le a \le 3\sqrt{3}$. *Указание.* Выполняя замену $u = \sin x$, получаем уравнение $-4u^3 + 9u = a$, левая часть которого на промежутке $[-1; 1]$ принимает значения из промежутка $\left[-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right]$.

ФИЗИКА

1. $k = \dfrac{m_1^2 v^2}{(m_1+m_2)\Delta l^2} - \dfrac{2(m_1+m_2)g\mu}{\Delta l} = 2{,}1$ кН/м.

2. $T = (1/8)\rho_В V g = 1{,}22 \cdot 10^{-2}$ Н. **3.** $V_1/V_2 = 1{,}86$.

4. $h = \dfrac{mR(T_2-T_1)}{M(p_0 S - m_0 g)} = 0{,}81$ м.

5. $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}\dfrac{R_2C_2 - R_1C_1}{(R_1+R_2+r)(C_1+C_2)} = 4{,}27$ В.

6. $\Delta p = \sqrt{2}mv\sin\varphi\cdot\left(1-\cos\left(\dfrac{eB}{m}\dfrac{l}{v\cos\varphi}\right)\right)^{1/2}$.

7. $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$, $\omega = \dfrac{Bl}{\sqrt{mL}}$. **8.** $I_0 = Q/\sqrt{2LC}$.

9. $\Delta t = vln/c^2 \approx 1{,}6\cdot10^{-17}$ с. **10.** $\dfrac{N_э}{N_ф} = \dfrac{Ihc}{Pe\lambda} = 0{,}02$.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 170 кг. **2.** $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$.

3. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$. **4.** Отрезок следует разделить пополам. **5.** $S = a^2\sqrt{39}/6$.

Вариант 2

1. 3 ч, 4 ч. **2.** $x_1 = 3$, $x_2 = 27$. **3.** $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $\frac{a}{\sqrt{3}}$; $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (при этом $V_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}a^3$). *Указание.* Выразите объем через ее высоту.

5. 45°. *Указание.* Угол между плоскостями равен углу между прямыми, им перпендикулярными, т.е. углу между SD и SC.

Вариант 3

1. $V = 6$. **2.** $1/8$ (при $a \ge 0$, $a \ne 1$). **3.** $(-\infty; 17/5) \cup (4; +\infty)$.

4. $x = -100$. *Указание.* Учитывая, что $-x > 0$, преобразуйте $\lg x^2 = \lg\left((-x)^2\right) = 2\lg(-x)$.

5. $x_1 = \frac{2}{3}m\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $m, n, k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Пользуясь формулой

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

приведите уравнение к виду

$$\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3}{2}x\cos\frac{3}{2}x,$$

а затем, заметив, что

$$\sin\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right),$$

к виду

$$\sin\frac{3}{2}x\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Вариант 4

1. $V = 3\sqrt{3}/4$. **2.** $\sqrt{|a-b|}$ (при $a \ne b$).

3. $(-\infty; -5) \cup (-2; -1)$. **4.** $x = 4$.

5. $x = 60° + 180° n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Введите новую неизвестную $y = x + 30°$.

Вариант 5

1. $V = \frac{a^3}{24}$, $S = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)$.

2. $\sqrt{1-a}$ (при $-1 < a < 1$).

3. $(-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$. **4.** $x = 7$.

5. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$; $n, k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Замените $\sin 3x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ и воспользуйтесь формулой

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Задачи устного экзамена

1, 2, 3. См. рис.17, 18, 19.

4. $-2 < k < 6$. **5.** $x_1 = 1$; $x_2 = -1$. **6.** $1 \le x \le 2$.

7. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$; $n \in Z$. **8.** $1 < x \le 7$.

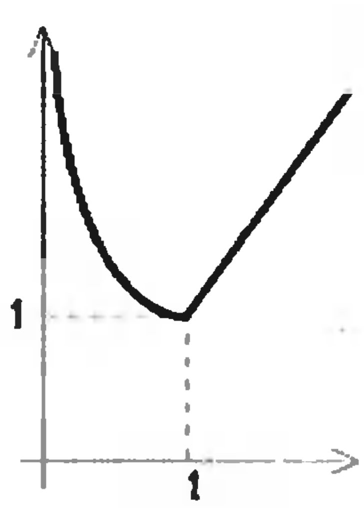


Рис. 17

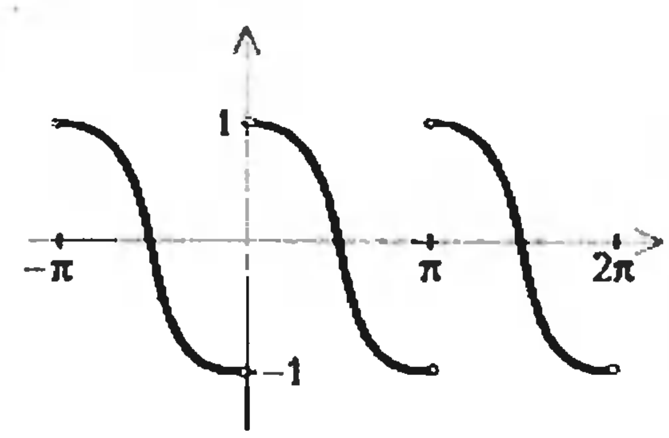


Рис. 18

9. $0 < x < 5/2$.

10. Бесконечно много. **11.** 1.

12. 1125 при 1620. *Указание.* Используйте признаки делимости на 5 и на 9.

13. $a \in (-1; 0) \cup (0; 8/5)$.

Указание. Выразите $x_1^2 + x_2^2$ через $x_1 + x_2$ и x_1x_2 и не забудьте об условии существования двух корней.

14. 2. **15.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

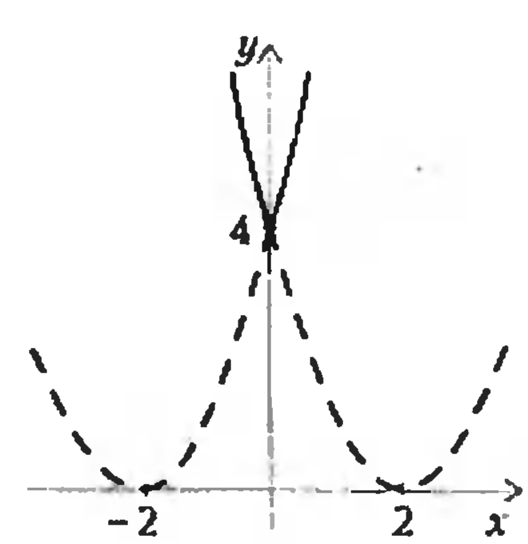


Рис. 19

ФИЗИКА

1. $v_x = -18{,}5$ м/с; $s = 17{,}2$ м; $\Delta x = 20$ м.
2. $a = 4{,}5$ м/с^2; $F_н = 3$ Н. 3. $m = 30$ кг. 4. $v = 870$ м/с.
5. $T_1 = 225$ К. 6. $t = 96{,}6$ с. 7. $m = 18$ г.
8. $q = 4{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл. 9. $A = 6{,}7 \cdot 10^{-7}$ Дж. 10. $n = \sqrt{3} = 1{,}7$.

IV РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ И КОСМИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Задачи теоретического тура

8—9 КЛАССЫ

1. Только на экваторе.
2. Приблизительно в 1, 6 раза.
3. Чтобы нигде на планете день не сменялся ночью, требуется одновременное выполнение трех условий: а) угловые скорости орбитального и осевого вращений должны совпадать; б) ось вращения планеты должна быть перпендикулярна плоскости орбиты; в) планета должна иметь круговую орбиту, чтобы угловая скорость орбитального вращения не менялась в течение года.
4. Время полного солнечного затмения составляет примерно 134 с (время затмения максимально в том случае, когда центр лунного диска проходит через центр солнечного).
5. С 3 марта по 18 апреля.
6. 25 марта в 12 ч 54 мин московского зимнего времени; приблизительно 80°20′; да в темное время суток.

10 КЛАСС

1. Да, если подняться на гору.
2. Приблизительно 2,5 км/с.
3. Около 20 пк.
4. Реальное время затмения будет больше вычисленного.
5. Примерно 2550 лет.

11 КЛАСС

1. Около 43,7 кпк; не меньше 483 км/с.
3. Около 20 пк; приблизительно $1{,}5^m$.
5. На орбиту, а значит, и на период обращения может повлиять наличие планет и любое, даже незначительное, гравитационное возмущение.
6. Примерно −0,03; это звезда класса А с температурой около 10000 К.

НАПЕЧАТАНО В 1997 ГОДУ

БУДУЩИМ НОБЕЛЕВСКИМ ЛАУРЕАТАМ

Польская Академия наук и Институт физики приглашают школьников старших классов к участию в 6-м Международном конкурсе исследовательских работ «Первый шаг к Нобелевской премии по физике». Работу объемом до 25 печатных страниц, написанную на английском языке, надо выслать до 31 марта 1998 года по адресу:

Dr. Waldemar Gorzkowski
Secretary General of the «FIRST SPEP»
Institute of Physics, Polish Academy of Sciences
al. Lotnikow 32/46, (PL)02-668 Warszawa

Работа должна быть написана одним автором, содержать дату рождения, домашний адрес и адрес школы.

Лучшие работы будут награждены и опубликованы, а их авторы в ноябре 1998 года будут приглашены в Институт физики на научную стажировку сроком на один месяц.

Желаем успехов!

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
А.Н.Балдин, Д.Н.Гришукова, В.А.Иванюк, М.М.Константинова, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 2124

ЭРА НОВЫХ ЧЕМПИОНОВ

В мае этого года в Нью-Йорке состоялся исторический поединок между шахматным королем Гарри Каспаровым и американской программой «Deep Blue», он завершился сенсационной победой суперкомпьютера со счетом 3,5 : 2,5.

Главная причина неудачи Каспарова заключается в том, что он в этом ответственном поединке не столько играл в шахматы, сколько ставил научные эксперименты, а точнее, играл в антикомпьютерные шахматы! А играть-то надо было, как обычно, в шахматы «античеловеческие»... В результате такого эксперимента Гарри изменил самому себе, своему шахматному стилю. Но ведь Каспаров — шахматист, а не лабораторный экспериментатор. Человек в любой ситуации должен оставаться самим собой, быть верным своей личности. Думаю, этот тезис применим и к шахматистам, не важно, кто сидит напротив вас — живое существо или Искусственный Мозг.

Вспомним, как проходил матч. Первая партия после бурных осложнений принесла победу Каспарову. Во второй чемпион мира избрал несвойственный ему дебют, получил пассивную позицию и так и не сумел вырваться из тисков машины (упустив к тому же счастливую возможность спастись в заключительной позиции). В трех следующих встречах Человек владел инициативой, но Компьютер стоял насмерть и во всех трех добился ничьей. Обессиленный, сломленный таким печальным стечением обстоятельств, в шестой, решающей схватке Каспаров был буквально сам не свой: он проиграл ее всего за 19 ходов! Приведем обе партии этого сенсационного матча, выигранные компьютером — вторую и шестую.

«Deep Blue» — Г.Каспаров

Испанская партия

1. e4 e5. Любимый ответ Каспарова на ход королевской пешки — 1...c5. Сицилианская защита принесла ему много замечательных побед, зачем же было изменять ей? **2. Kf3 Kc6 3. Cb5 a6 4. Ca4 Kf6 5. 0-0 Ce7 6. Лe1 b5 7. Cb3 d6 8. c3 0-0 9. h3 h6 10. d4 Лe8 11. Kbd2 Cf8 12. Kf1 Cd7 13. Kg3 Ka5 14. Cc2 c5 15. b3 Kc6 16. d5 Ke7 17. Ce3 Kg6 18. Фd2.** До сих пор еще теория. У черных прочная, но пассивная позиция, совсем не в духе Каспарова. **18...Kh7?!** Фланговые маневры черных коней ведут к потере времени. **19. a4 Kh4 20. K:h4 Ф:h4 21. Фe2 Фd8 22. b4 Фc7 23. Лec1 c4?!** Теперь пешечная структура на ферзевом фланге стабилизируется, и шансов на контригру у черных становится еще меньше. **24. Лa3 Лec8 25. Лca1 Фd8 26. f4 Kf6 27. fe de 28. Фf1 Ke8 29. Фf2 Kd6 30. Cb6 Фe8 31. Л3a2 Ce7 32. Cc5 Cf8 33. Kf5 C:f5 34. ef f6?** После того, как пешка «е» в подобных позициях покидает поле e4, черные должны немедленно затевать контригру в центре — e5-e4! Теперь черным не хватает воздуха. **35. C:d6 C:d6 36. ab.** Не так ясно 36. Фb6 Лd8 37. ab Лab8 38. Ф:a6 e4, и несмотря на отсутствие двух пешек у черных богатая контригра по черным полям. **36...ab 37. Ce4!** На доске полная доминация белых фигур.

37...Л:a2 38. Ф:a2 Фd7 39. Фa7 Лc7 40. Фb6 Лb7 41. Лa8+ Kpf7 42. Фa6 Фc7 43. Фc6 Фb6+ 44. Kpf1? Проще было 44. Kph1, централизация короля могла привести к печальным последствиям для робота, если, конечно, он способен испытывать печаль... **44...Лb8.** Черным уже нечем дышать, но тут последовал неожиданный финал. **45. Лa6??**

Черные сдались??

Поразительно! Каспаров упускает верный шанс ускользнуть от машины. Конечно, после 45...Ф:c6 46. dc положение черных безнадежно. Но при броске ферзем на e3 белый король не смог бы убежать от преследования: 45...Фe3! 46. Ф:d6 Лe8! 47. h4! (в надежде скрыться королем на h3) 47...h5!! (лишая белых этой надежды), и королю не уйти от вечного шаха ферзем по диагонали c1-f4. Видно, компьютер, играя Лa1-a6, не досчитал до конца все последствия этого хода, между тем к выигрышу вел размен ферзей. Каспаров же поверил ему на слово. Итак, чемпион мира сдался в ничейной позиции!

Счет сравнялся, затем в трех партиях подряд Каспаров стоял на выигрыш, но робот выдержал все испытания. Легко представить, какое настроение было у чемпиона мира, когда он отправился на шестую, решающую партию. Всякое случается, но можно ли было ожидать, что спустя всего час после начала игры все будет кончено?!

«Deep Blue» — Г.Каспаров

Защита Каро—Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. Kc3 de 4. K:e4 Kd7 5. Kg5 Kgf6 6. Cd3 e6 7. K1f3. В этой позиции черные автоматически выводят слона — 7...Cd6 и лишь после 8. Фe2 отбрасывают коня — 8...h6, получая прочную позицию.

7...h6?

Поспешный ход пешкой позволяет белым жертвой коня развить страшную атаку на неприятельского короля. После партии Каспаров утверждал, что машина еще не созрела для таких позиционных решений, ведь белые получают за фигуру всего одну пешку, что-то тут не так! Но удар на e6 относится к разряду дебютных ходов, которые закладываются в компьютер заранее. Но даже предполагая, что машина откажется от сильнейшего продолжения, чемпион мира не должен был идти на такой риск. Еще одно объяснение хода h7-h6 заключается в том, что возникающая после жертвы коня позиция в дебютных книжках оценивается как спорная, и Каспаров мог умышленно пойти на нее...

8. K:e6! При черном слоне d6 эта жертва была бы некорректна: во-первых, у белых нет поля f4 для слона и, во-вторых, черный король уютно располагается на f8. **8...Фe7 9. 0-0 fe 10. Cg6+ Kpd8 11. Cf4.** Далее теория рассматривает продолжения 11...b6, 11...Фb4 и, как лучшее, 11...Kd5 12. Cg3 Фb4. Конечно, черные еще могут упорно сопротивляться, но статистика неумолима: почти все партии заканчивались их разгромом.

11...b5 12. a4! Cb7 13. Лe1 Kd5 14. Cg3 Kpc8 15. ab cb 16. Фd3! Cc6 17. Cf5 ef 18. Л:e7 C:e7 19. c4. Черные сдались.

Фантастика! В решающей партии шахматный король проиграл роботу в 19 ходов. Формально в данный момент на доске соблюдается примерное материальное равенство, но Каспаров прекрасно понимал, что для робота это положение просто смешное. После 19...Kb4 20. Ф:f5 bc 21. Ke5 или 19...bc 20. Ф:c4 Kb4 (20...Kpb7 21. Фa6×!) 21. Лe1 Лe8 22. Kh4 Kb6 23. Фf7 K6d5 24. K:f5 Kpd8 25. K:g7 позиция черных разваливается как карточный домик.

Поединок завершился со счетом 3,5:2,5 в пользу «Deep Blue». Впервые в истории Компьютер в серьезном матче одолел самого сильного Человека на планете. Наступила новая шахматная эра!

Е.Гик

Индекс 70465

ИГРУШКИ ПО ФИЗИКЕ

ХОЛОДНОЕ КИПЕНИЕ

Как известно, чтобы довести воду до кипения, ее надо нагревать. А можно ли вскипятить воду охлаждением? На первый взгляд кажется, что это невозможно. Но не торопитесь с выводами. Проделайте предлагаемый ниже простой эксперимент и поразмышляйте над его объяснением.

Для опыта вам понадобится химическая пробирка объемом 30–40 мл, плотно закрываемая пробкой, газовая горелка и держатель для пробирки (можно использовать, например, деревянную прищепку). Приготовьте также бутылку с холодной водой (при комнатной температуре) и бутылку с ледяной водой (заранее поставьте пластиковую бутылку с водой в морозильник, но не дайте воде полностью замерзнуть).

Налейте в пробирку воды, немного больше половины ее объема, и начните нагревать воду над горелкой. Важный момент: держите пробирку наклонно и старайтесь нагревать верхнюю часть водяного столба (если нагревать воду в нижней части, то при закипании расширяющиеся пары могут резко выбросить воду из пробирки). Дождитесь, пока установится интенсивное и устойчивое кипение верхней части воды, после чего быстро и плотно закройте пробирку, одновременно отодвинув ее от огня. Как и следовало ожидать, кипение немедленно прекратится. Теперь переверните пробирку пробкой вниз и полейте верхнюю (пустую) часть пробирки холодной водой. Как вы думаете, что произойдет? Вода в пробирке начнет кипеть! Через некоторое время кипение, разумеется, прекратится, но возобновится после повторного орошения пробирки холодной водой. Когда холодный «душ» перестанет действовать (к этому времени остывшую пробирку можно будет держать рукой), полейте пустую часть пробирки ледяной водой — и вода в прохладной пробирке послушно закипит еще раз!

Попробуйте дать разумное объяснение этому так называемому холодному кипению.

(После размышлений загляните внутрь журнала на с.23.)

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

КАРАНДАШ В ПЕТЛИЦЕ ПИДЖАКА

Возьмите карандаш, сделайте в нем желобок около одного из концов, потом свяжите из веревки петлю так, чтобы длина веревки на петле была меньше удвоенного расстояния от желобка до другого конца карандаша. Теперь привяжите оставшимися концами веревки петлю к карандашу, охватывая карандаш по желобку, предварительно пропустив петлю в петлицу пиджака, а карандаш в петлю так, как показано на рисунке. Желобок нужен для того, чтобы петля была жестко прикреплена к карандашу.

А теперь попытайтесь, не развязывая веревку, не разрывая ее, не ломая карандаша, снять карандаш с вашего пиджака.

С этой задачей связана небольшая история. В 1951 году известный математик, ныне академик, И.Р.Шафаревич читал свой первый курс лекций в МГУ. Во время перерыва студенты показали ему эту задачу. Игорь Ростиславович попробовал один вариант, другой, но... карандаш оставался на его пиджаке и на следующем часу лекции, и после нее.

Когда Игорь Ростиславович появился на следующей своей лекции через несколько дней, то карандаш продолжал украшать его пиджак. Однако лекция началась с того, что Шафаревич торжественно освободился от этого украшения.

А как получится у вас?